Скокообразно изменение на параметрите в телеграфните уравнения

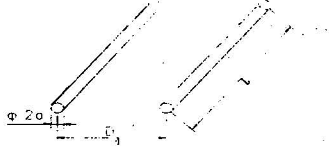
Доц. д-р Росица Коцева Ангелова, ВТУ "Т. Каблешков" - София
Проф.дтн Любомир Варадинов Колев, ТУ - София
Проф.дмн Тодор Рачев Гичев, УАСГ - София

The instantaneous processes in long lines described with the telegraph equations are analyzed. The values of the current and the voltage in the end of these processes are obtained. Analogues of the charges and fluxes conservation principles from the theory of the instantaneous processes with concentrated parameters are formulated.

Въведение. Скокообразното изменение на параметрите в електрическите вериги е процес, който представлява абстракция на процеса на тяхното непрекъснато, но бързо изменение. Затова е естествено при изучаване на последствията от мигновените процеси да се използват редици от процеси, протичащи в реални интервали, чиято дължина непрекъснато намалява. Тази идея по-нататък се развива при изследването на мигновени процеси, които протичат в дълги линии и се моделират с телеграфните уравнения. Решава се задачата за определяне на стойностите на токовете и напреженията в края на такива процеси, предизвикани от скокообразното изменение на капацитета и индуктивността. Формулират се аналози на законите за съхранение на зарядите и потокосцепленията, които са известни от теорията на мигновените комутационни процеси във вериги със съсредоточени параметри. Получените резултати се прилагат върху пример на симетрична двупроводна линия с мигновено изменение на разстоянието между двата проводника.

Скокообразно изменение на капацитета и индуктивността. Разглежда се симетрична двупроводна линия с диаметър на проводниците *2a* (фиг. 1).

Предполага се, че в участък с дължина *l* разстоянието между двата



Фиг.1

проводника се изменя непрекъснато от D_1 до стойност D_2 в интервал от време $[t_0, \tau]$. Ако C_1 и C_2 са стойностите на разпределения капацитет в двата края на интервала $[t_0, \tau]$, то съгласно [1] са в сила формулите

$$C_1 = \frac{10^{-9}}{36\ln\left(\frac{D_1}{a}\right)}, \mathrm{F/m} \quad , \quad C_2 = \frac{10^{-9}}{36\ln\left(\frac{D_2}{a}\right)}, \mathrm{F/m}. \qquad (1)$$

На изменението на разстоянието между проводниците в интервала $[t_0, \tau]$ съответства изменение на разпределения капацитет, което се определя от функция $C_\tau(t)$, за която $C_\tau(t_0) = C_1$ и $C_\tau(\tau) = C_2$. Тогава токът $i_\tau(x, t)$ и напрежението $u_\tau(x, t)$ в интервала $[t_0, \tau]$ удовлетворяват телеграфните уравнения

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = Gu + \frac{\partial(uC_\tau(t))}{\partial t} \tag{2}$$

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = Ri + L\frac{\partial i}{\partial t}, \tag{3}$$

в които с G, R и L са означени съответните разпределени параметри на веригата - проводимост, съпротивление и индуктивност.

При $\tau \to t_0$ редицата от процеси в интервалите $[t_0, \tau]$ определят мигновения процес в момента t_0, при който разстоянието между проводниците в участъка с дължина l се изменя скокообразно от D_1 на D_2 и съответно разпределения капацитет се изменя скокообразно от C_1 на C_2. Проблемът, който се разглежда по-нататък, е да се определят стойностите $i(x, t_0^-)$ и $u(x, t_0^+)$ на тока и напрежението в края на мигновения процес в момента t_0 за участъка с дължина l, например в интервала $[x_0, x_0 + l]$.

Двете страни на уравненията (2) и (3) да диференцираме съответно по x и по t. След някои преобразувания на получените равенства, относно тока i се получава уравнението

$$C_\tau(t)L\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + \frac{\partial i}{\partial t}\left(LG + C_\tau{}'(t)L + C_\tau(t)R\right) + \left(C_\tau{}'(t) + G\right)R\,i = \frac{\partial^2 i}{\partial x^2}. \tag{4}$$

При означението $\rho_\tau(t) = LC_\tau(t)$ системата от уравненията (2) и (4) се записва във вида

$$\rho_\tau(t)\left(\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + \frac{\partial i}{\partial t}\left((\ln \rho_\tau(t))' + \frac{G_\tau L}{\rho_\tau(t)} + \frac{R}{L}\right) + R\,i\left(\frac{G}{\rho_\tau(t)} + \frac{(\ln \rho_\tau(t))'}{L}\right)\right) = \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} \tag{5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left((\ln \rho_\tau(t))' + \frac{GL}{\rho_\tau(t)}\right)u + \frac{L}{\rho_\tau(t)}\frac{\partial i}{\partial x} = 0. \tag{6}$$

Решенията $i_\tau(x, t)$ и $u_\tau(x, t)$ за $t \in [t_0, \tau]$ и $x \in [x_0, x_0 + l]$ на системата (5) и (6) с начални условия

$$i(x, t_0) = f(x), \quad u(x, t_0) = g(x) \tag{7}$$

и гранични условия

$$i(x_0, t) = f(x_0), \quad i(x_0 + l, t) = f(x_0 + l) \tag{8}$$

апроксимират при $\tau \to t_0$ мигновения процес породен от скокообразното изменение в момента t_0 на разпределения капацитет C.

Аналогично се анализира и мигновения процес, който се предизвиква от скокообразното изменение на разпределената индуктивност в телеграфните уравнения. Нека в момента t_0 и интервала $[x_0, x_0 + l]$ тя се променя скокообразно от L_1 на L_2. Разглежда се интервалът от време $[t_0, \tau]$, в който изменението на индуктивността се определя от функция $L_\tau(t)$, за която $L_\tau(t_0) = L_1$ и $L_\tau(\tau) = L_2$.

Тогава токът $i_\tau(x, t)$ и напрежението $u_\tau(x, t)$ при означенията от (2) и (3) удовлетворяват системата

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = Gu + C\frac{\partial i}{\partial t} \tag{9}$$

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = Ri + \frac{\partial(L_\tau(t)\,i)}{\partial t}. \tag{10}$$

И тук основен е проблемът за намиране на тока $i(x, t_0^+)$ и напрежението $u(x, t_0^+)$ в края на мигновения процес.

Да диференцираме двете страни на уравнението (9) по t, а на уравнението (10) по x. След някои преобразувания на получените равенства , относно напрежението u се получава уравнението

$$L_\tau(t)C\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \left(L_\tau(t)G + L_\tau'(t)C + CR\right)\frac{\partial u}{\partial t} + \left(L_\tau'(t) + R\right)Gu = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{11}$$

При означението $\rho_\tau(t) = CL_\tau(t)$ уравненията (11) и (10) приемат вида

$$\rho_\tau(t)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial t}\left((\ln\rho_\tau(t))' + \frac{RC}{\rho_\tau(t)} + \frac{G}{C}\right) + Gu\left(\frac{R}{\rho_\tau(t)} + \frac{(\ln\rho_\tau(t))'}{C}\right)\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{12}$$

.

$$\frac{\partial i}{\partial t} + \left((\ln\rho_\tau(t))' + \frac{RC}{\rho_\tau(t)}\right)i + \frac{C}{\rho_\tau(t)}\frac{\partial u}{\partial x} = 0. \tag{13}$$

Решенията $i_\tau(x, t)$, $u_\tau(x, t)$ за $t\in[t_0, \tau]$ и $x\in[x_0, x_0+l]$ на системата (12), (13) с начални условия (7) и с гранични условия

$$u(x_0, t) = g(x_0), \quad u(x_0+l, t) = g(x_0+l) \tag{14}$$

апроксимират при $\tau\to 0$ мигновения процес породен от скокообразното изменение в момента t_0 на индуктивността L.

Общи модели на мигновени процеси при обикновени и частни диференциални уравнения. При фиксирано $x\in[x_0, x_0+l]$ уравненията (6) и (13) имат вида

$$\frac{dy}{dt} + \left(\alpha_1(\ln\rho_\tau(t))' + a_\tau(t)\right)y + q_\tau(t) = 0, \tag{15}$$

където в интервала $[t_0, \tau]$ функциите $\rho_\tau(t)$, $a_\tau(t)$ и $q_\tau(t)$ са непрекъснати и $\rho_\tau(t_0) = \rho_1$, $\rho_\tau(\tau) = \rho_2$, а функциите $a_\tau(t)$ и $q_\tau(t)$ остават равномерно ограничени. Освен това при някаква константа M за $t_0 \le s \le t < \tau$ при $\tau\to t_0$ е изпълнено $(\rho_\tau(s)/\rho_\tau(t))^{\alpha_1} \le M$. В интервала $[t_0, \tau]$ като решение на уравнението (15) с начално условие $y(t_0) = y_0$ се разглежда функцията $y_\tau(t)$, която се определя от равенството

$$y_\tau(t) = \left(\frac{\rho_1}{\rho_\tau(t)}\right)^{\alpha_1}\gamma_\tau(t)y_0 - \int_{t_0}^{t} q_\tau(s)\gamma_\tau^{-1}(s)\left(\frac{\rho_\tau(s)}{\rho_\tau(t)}\right)^{\alpha_1}ds,$$

където е използвано означението

$$\gamma_\tau(t) = \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a_\tau(s)ds\right).$$

От това представяне на решението на уравнението (15) се получава следната теорема:

Теорема1. При $\tau \to t_0$ е в сила равенството

$$y(t_0^+) = \lim_{\tau \to t_0} y_\tau(\tau) = \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{\alpha_1} y_0.$$

За $x \in [x_0, x_0 + l]$ и $t \in [t_0, \tau)$ уравнения (5) и (12) имат вида

$$A_\tau(t)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + (\alpha_1(\ln \rho_\tau(t))' + a_{1\tau}(t))\frac{\partial v}{\partial t} + (\alpha_2(\ln \rho_\tau(t))' + a_{2\tau}(t))v\right) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \qquad (16)$$

където функцията $\rho_\tau(t)$ се определя както в уравнението (15), а функциите $a_{1\tau}(t)$, $a_{2\tau}(t)$, $A_\tau(t)$ са непрекъснате за $t \geq 0$ и равномерно ограничени при $\tau \to t_0$; освен това $A_\tau(t) > 0$. При направените предположения (виж [3]) за всяко τ, $\tau \to t_0$, може да се построи редица от функции $v_{\tau s}(x, t)$, $s = 1,2,..$, която удовлетворява диференциалното уравнение (16) и граничните условия

$$v(x_0, t) = \varphi(t), \qquad v(x_0 + l, t) = \psi(t),$$

а също така приближено удовлетворява за $x \in [x_0, x_0 + l]$ началните условия

$$v(x, t_0) = f(x), \qquad \frac{\partial v(x, t_0)}{\partial t} = F(x).$$

В сила е следната теорема:

Теорема 2. За всяко положително число ε съществува такова естествено число N, че при всяко $s > N$ може да се намери число $\tau_0(s)$, за което ако $\tau \in (t_0, \tau_0(s))$, то

$$\left\|v_{\tau s}(x,\tau) - f(x)\right\| + \left\|\frac{\partial v_{\tau s}(x,\tau)}{\partial t} - \left(\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{\alpha_1} F(x) - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\frac{\left(\rho_2^{\alpha_1} - \rho_1^{\alpha_1}\right)}{\rho_2^{\alpha_1}} f(x)\right)\right\| < \varepsilon,$$

където с $\|\bullet\|$ се означава средноквадратичната норма в интервала $[x_0, x_0 - l]$.

Приближаването на величината v и на нейната производна $\frac{\partial v}{\partial t}$ в смисъла на тази теорема по-нататък се означава

$$v(x, t_0^+) \approx f(x), \qquad \frac{\partial v(x, t_0^+)}{\partial t} \approx \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{\alpha_1} F(x) - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\frac{(\rho_2^{\alpha_1} - \rho_1^{\alpha_1})}{\rho_2^{\alpha_1}} f(x).$$

Определяне на стойностите на токовете и напреженията в края на мигновените процеси. По-нататък се използват Теорема 1 и Теорема 2 за определяне на токовете токовете $i\ (x, t_0^+)$ и напреженията $u\ (x, t_0^+)$ в края на мигновените процеси, породени от скокообразното изменение на параметрите C и L в телеграфните уравнения

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = Gu + C\frac{\partial u}{\partial t}$$
$$-\frac{\partial u}{\partial x} = Ri + L\frac{\partial i}{\partial t}.$$
От тези уравнения и от началните условия (7) при $t = t_0$ се получават равенствата
$$\frac{\partial i(x,t_0)}{\partial t} = -\frac{1}{L}\left(Rf(x) + g'(x)\right) \tag{17}$$
$$\frac{\partial u(x,t_0)}{\partial t} = -\frac{1}{C}\left(Gg(x) + f'(x)\right). \tag{18}$$

При скокообразното изменение на капацитета от C_1 на C_2 съгласно Теорема 2, приложена за задачата (5), (7), (17) и (8), и съгласно Теорема 1, приложена за задачата (6), (7), токът $i(x, t_0^+)$ и напрежението $u(x, t_0^+)$ в края на мигновения процес се определят от съотношенията
$$i(x,t_0^+) \approx i(x,t_0), \qquad u(x,t_0^+) \approx \frac{C_1}{C_2}u(x,t_0) \tag{19}$$
$$\frac{\partial i(x,t_0^+)}{\partial t} \approx -\frac{1}{L}\left(\frac{C_1}{C_2}g'(x) + Rf(x)\right). \tag{20}$$

Второто съотношение в (19) представлява аналог на закона за съхранение на зарядите при мигновените процеси във вериги със съсредоточени параметри [2]. От (19) и (20) следва, че $i(x, t_0^+)$ и $u(x, t_0^+)$ удовлетворяват второто от телеграфните уравнения за $t = t_0^+$.

При $k = \ln(D_2/D_1)$ съгласно формулите (1) се получава
$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{\ln\left(\frac{D_2}{a}\right)}{\ln\left(\frac{D_1}{a}\right)} = \frac{\ln D_2 - \ln a}{\ln D_1 - \ln a} = 1 + \beta k, \tag{21}$$
където е положено $\beta = \left(\ln\left(D_1/a\right)\right)^{-1}$. Например за $D_1 = 0.2\ m$ и $a = 0.005\ m$ получаваме $\beta = 0.2711$. Тогава при преминаване през мигновения процес, предизвикан от скокообразното изменение на разстоянието между проводниците в разгледания в началото пример, съгласно (19) и (21) токът се запазва и
$$u(x,t_0^+) - u(x,t_0) \approx \beta k u(x,t_0)$$
$$\frac{\partial i(x,t_0^+)}{\partial t} - \frac{\partial i(x,t_0)}{\partial t} \approx -\frac{\beta k}{L}\frac{\partial u(x,t_0)}{\partial x}.$$

Отчитайки приближения характер на формулите (1) [1] следва да се отбележи, че така получените зависимости ще бъдат в сила, когато k остава в някаква околност на нулата.

При скокообразно изменение на индуктивността L от L_1 на L_2 съгласно теорема 2, приложена за задачата (12), (7), (18), (14) и съгласно теорема 1, приложена за задачата (13), (7), токът $i(x, t_0^+)$ и напрежението $u(x, t_0^+)$ в края на мигновения процес се определят от съотношенията

$$u(x,t_0^+) \approx u(x,t_0) \quad , \qquad i(x,t_0^+) \approx \frac{L_1}{L_2} i(x,t_0), \tag{22}$$

$$\frac{\partial u(x,t_0^+)}{\partial t} \approx -\frac{1}{C}\left(Gg(x) + \frac{L_1}{L_2} f'(x) \right).$$

В този случай стойностите $i(x, t_0^+)$, $u(x, t_0^-)$ и $\dfrac{\partial u(x,t_0^+)}{\partial t}$ удовлетворяват първото от телеграфните уравнения при $t = t_0^+$, а второто равенство в (22) представлява аналог на закона за съхранение на потокосцеплението при мигновени процеси във вериги със съсредоточени параметри.

Заключение. Предложеният модел на мигновени процеси, породени от скокообразното изменение на параметрите на вериги с разпределени параметри, представлява естествено разширяване на модела на мигновените комутационни процеси във вериги със съсредоточени параметри. Това е достатъчно основание те също да бъдат наричани комутационни.

Литература:

1. С. И. Баскаков. Радиотехнические цепи с разпределенными параметрами. Москва, “Вышая школа”, 1980.
2. В. П. Попов. Основы теории цепей. Москва, “Вышая школа”, 1985.
3. В. П. Михайлов. Дифференциальные уравнения в частных производных. Москва, 1976.