Синтез на синусоидални автоколебателни системи

ст. ас. Тодор Георгиев Тодоров -ТУ-София
E-mail : ttodorov@vmei.acad.bg

Self-oscillating Systems Synthesis. This paper present an approach to synthesis of differential equations, describing a wide class of oscillatory circuits. The obtained in this way differential equation have in general more that one periodic solution with preliminary prescribed properties. The theory is based on Melnikov's techniques.

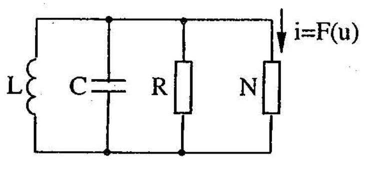
1. Въведение

Известно е, че голям клас синусоидални автоколебателни вериги, съдържащи линеен реактивен елемент и нелинеен резистор с отрицателно диференциално съпротивление, се описват с уравнението [1], [2], [3], [4]

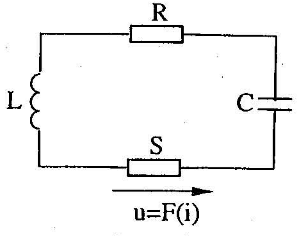
$$(1) \qquad \ddot{x} + \varepsilon . f(x)\dot{x} + x = 0,$$

където x=x(τ) е нормираната генерирана величина (ток или напрежение), ε е малък параметър ($|\varepsilon| << 1$) , τ е нормирано време, а f(x) е функция, свързана по определен начин с волт-амперната характеристика на нелинейния резистор. Производните $\dot{x}$ и $\ddot{x}$ са по отношение на τ.

Характеристиката на нелинейния резистор може да бъде N-тип, или S-тип. Еквивалентните схеми на заместване по променлив сигнал на автоколебателни вериги, съдържащи нелинейни резистори, с характеристики от N-тип и S-тип, са показани на фиг. 1а, б [2] .



фиг. 1а



фиг. 1б

Обикновено характеристиката на нелинейния резистор се задава чрез полином. При това положение функцията f(x) също е полином.

Проблемът за синтез на автоколебателни вериги е свързан с конструирането на вериги, които да генерират сигнали с предварително зададени свойства – амплитуда, честота, стабилност, евентуално форма на колебанието.

В настоящата статия се излага един подход за синтез на автоколебателни системи, основан на качественото изследване на диференциалните уравнения, описващи процесите в тях. При това в зависимост от възбуждането (началните стойности) са възможни колебания с различна амплитуда. Основен момент в този подход е получаването на диференциално уравнение от типа (1), което да притежава няколко периодични синусоидални решения с предварително зададени свойства. След това въз основа на уравнението може да бъде получена конкретната електрическа верига. Подобен подход е използван в [5], където като пример е получено диференциално уравнение с три периодични решения.

2. Синтез на диференциално уравнение с няколко периодични решения

Уравнение (1) може да бъде записано в следния по-конкретен вид [3], [4]

$$(2)\qquad \ddot{x} + \varepsilon.\left(a_0 + \frac{dF(x)}{dx}\right)\dot{x} + x = 0,$$

където a_0 е константа, свързана със затихването на линейната част на осцилиращата верига, а F(x) е характеристиката на нелинейния резистор [3], обикновено зададена чрез полином.

В [6] е доказано, че само нечетните степени на полинома F(x) оказват влияние върху пораждането на гранични цикли, т.е. периодични колебания. При това положение характеристиката по променлив сигнал на нелинейния резистор е

$$(3)\qquad F(x) = a_1.x + a_3.x^3 + a_5.x^5 + \ldots + a_{2n+1}.x^{2n+1},$$

където в общ случай коефициентите a_1, a_3, …, a_{2n+1} също могат да бъдат нормирани. Тогава уравнение (2) приема вида

$$(4)\qquad \ddot{x} + \varepsilon.\left(b_1 + 3.b_3.x^2 + \ldots + (2n+1)b_{2n+1}.x^{2n}\right)\dot{x} + x = 0,$$

където $b_1=a_0+a_1$ и $b_i=a_i$ за $i>1$.

Функцията на Мелников за уравнение (4) има вида [6]

$$(5)\qquad M(h)=-4\pi.h.\left[\frac{b_1}{2^2}.\binom{2}{1}+\frac{b_3}{2^2}.\binom{4}{2}h+\ldots+\frac{b_{2n+1}}{2^{n+2}}.\binom{2n+2}{n+1}h^n\right],$$

където h е величина, свързана с фазовите променливи x и $y=-\dot{x}$ по следния начин

$$(6)\qquad h=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2,\qquad h\in(0,\infty).$$

Функцията M(h) се формира основно от коефициентите b_1, b_3, …, b_{2n+1}.

Известно е, че граничните цикли се определят от нулите на функцията M(h) [6]. Ако h_j е прост реален корен на уравнението M(h)=0, т.е.

$$(7)\qquad \frac{b_1}{2^2}.\binom{2}{1}+\frac{b_3}{2^2}.\binom{4}{2}h_j+\ldots+\frac{b_{2n+1}}{2^{n+2}}.\binom{2n+2}{n+1}h_j^n=0,$$

то уравнение (4) има граничен цикъл, който във фазовата равнина е окръжност с радиус

$$(8)\qquad r_j=\sqrt{2.h_j}\,.$$

Полученият граничен цикъл съответства във времева област на синусоидално колебание с амплитуда r_j и нормирана честота 1, т.е.

$$(9)\qquad x(\tau)=\sqrt{2.h_j}.\sin\tau.$$

Освен това, ако $M'(h_j)<0$ колебанието е устойчиво, а ако $M'(h_j)>0$ - неустойчиво.

От изложеното до тук е ясно, че за да синтезираме диференциално уравнение с предварително зададени свойства на периодичните решения е необходимо да синтезираме нелинеен резистор с такива коефициенти a_i=b_i на волт-амперната характеристика, че корените $h_j=\frac{r_j^2}{2}$ на уравнението (7) и получените от тях синусоидални колебания да удовлетворяват предварителните изисквания.

3. Пример

Да синтезираме диференциално уравнение, допускащо три гранични цикъла (n=3) с радиуси

(10) $r_1=\sqrt{2}$, $\quad r_2=2$, $\quad r_3=\sqrt{6}$,

т.е синусоидални колебания

(11) $x_1(\tau)=\sqrt{2}.\sin\tau$, $\quad x_2(\tau)=2.\sin\tau$, $\quad x_3(\tau)=\sqrt{6}.\sin\tau$.

Това означава, че трябва да намерим нелинеен резистор с коефициенти на нелинейната характеристика $a_i=b_i$ такива, че числата

(12) $h_1=1$, $\quad h_2=2$, $\quad h_3=3$,

да бъдат корени на уравнението

(13) $$\frac{b_1}{2^2}.\binom{2}{1}+\frac{b_3}{2^3}.\binom{4}{2}h+\frac{b_5}{2^4}.\binom{6}{3}h^2+\frac{b_7}{2^5}.\binom{8}{4}h^3=0,$$

От $\binom{n}{k}=\frac{n.(n-1)\ldots[n-(k-1)]}{k!}$ следва, че $\binom{2}{1}=2$, $\binom{4}{2}=6$, $\binom{6}{3}=20$, $\binom{8}{4}=70$.
Замествайки тези изрази в уравнение (13) се получава

(14) $$\frac{1}{2}.b_1+\frac{3}{4}.b_3.h+\frac{5}{4}.b_4.h^2+\frac{35}{16}.b_7.h^3=0.$$

Сравнявайки уравнение (14) с уравнението

(15) $$(h-1)(h-2)(h-3)=h^3-6.h^2+11.h-6=0,$$

получаваме b_1=-6, $b_3=\frac{22}{3}$, $b_5=-\frac{12}{5}$, $b_7=-\frac{8}{35}$.

Тогава диференциалното уравнение, описващо синтезираната верига, има вида

$$(16а)\quad \ddot{x} + \varepsilon.\left(-6 + 3.\frac{22}{3}.x^2 - 5.\frac{12}{5}.x^4 + 7.\frac{8}{35}.x^6\right)\dot{x} + x = 0$$

или еквивалентната му система

$$(16б)\quad \begin{cases} \dot{x} = -y - \varepsilon.\left(-6.x + \frac{22}{3}.x^3 - \frac{12}{5}.x^5 + \frac{8}{35}.x^7\right) \\ \dot{y} = x \end{cases}$$

Възможни са и други коефициенти. При нормирането обикновено се приема $b_1=1$. Тогава представяме уравнение (14) във вида

$$(17)\quad h^3 + \frac{5}{2}.\frac{8}{35}.\frac{b_5}{b_7}.h^2 + \frac{3}{2}.\frac{8}{35}.\frac{b_3}{b_7}.h + \frac{8}{35}.\frac{1}{b_7} = 0$$

От сравняването с (15) получава ме коефициентите $b_1=1$, $b_3 = -\frac{11}{9}$, $b_5 = \frac{6}{15}$, $b_7 = -\frac{4}{105}$.

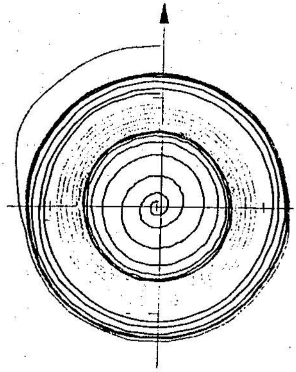
Тогава имаме

$$(18а)\quad \ddot{x} + \varepsilon.\left(1 - 3.\frac{11}{9}.x^2 + 5.\frac{6}{15}.x^4 - 7.\frac{4}{105}.x^6\right)\dot{x} + x = 0$$

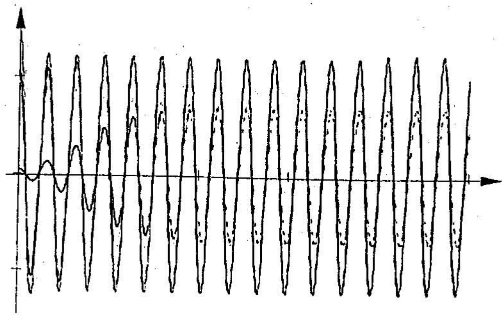
или еквивалентната му система

$$(18б)\quad \begin{cases} \dot{x} = -y - \varepsilon.\left(x - \frac{11}{9}.x^3 + \frac{6}{15}.x^5 - \frac{4}{105}.x^7\right) \\ \dot{y} = x \end{cases}$$

На фиг.2а е изобразен фазовият портрет, а на фиг.2б решението на системата (16б) в областта на променливата τ.



фиг. 2а



фиг. 2б

4. Заключение

Основен момент в настоящото изследване е получаването на диференциално уравнение, чиито решения да удовлетворяват предварително зададени изисквания. Граничните цикли зависят от смущението (члена пред ε в диференциалното уравнение), което от своя страна се определя от характеристиката на нелинейния резистор.

И така, необходимо е да бъдат избрани коефициентите на смущението, или коефициентите на характеристиката на нелинейния резистор по такъв начин, че да бъдат удовлетворени предварителните изисквания.

5. Литература

[1] Дамгов В. " Нелинейни и параметрични явления в радиофизически системи ", Академично издателство " Проф. М. Дринов ", София, 2000

[2] Мигулин В. В., В. И Медведев, Е. Р. Мустелъ, В. Н. Парыгин, " Основы теории колебаний ", Наука, Москва, 1988

[3] Минакова И. И., " Неавтономные режимы автоколебателъных систем ", Издателство Московского университета, 1987

[4] Дмитриев А. С., В. Я. Кислов, " Стохастические колебания в радиофизике ", Наука, Москва, 1989

[5] Koga T., M. Shinagawa, S. Hasako, ' Synthesis of Lienard's Equations Having More that One Periodic Solution", IEICE " Transactions on Fundamentals ", vol. E76-A, N^0, pp 848-857, June, 1993

[6] Savov V. N., Zh. D. Georgiev, T. G. Todorov, " On A Method for Determining Limit Cycles in nonlinear circuits ", " In. J. Electronics ", vol. 87, N^{0}7, pp 827-840, 2000