МЕТОД ЗА ИНТЕРПОЛАЦИЯ В СИСТЕМИТЕ С ЦПУ.

инж. Рада Мартинова Кръстева, гл.ас. Кръстю Щерев Кръстев, ТУ-София, ИПФ-Сливен, катедра „Електротехника електроника и автоматика"

A method for interpolation in CNC systems. In this paper a method for interpolation is represented. The method uses mathematical apparatus for the natural equations of the curves. The peculiarities of this method are considered and are compared with similar characteristics of other known methods.

Съществуващите алгоритми за интерполация са отпреди тридесет и повече години и са съобразени с тогавашните възможности на изчислителната техника – малка разрядна мрежа, ниска производителност. С развитието на елементната база се разкриват нови възможности за развитието им. Но посоката в която става това е усъвършенстване на сплайн интерполацията. Развитието на алгоритми, при които контурите на движение се задават анлитично, е слабо. В тази статия е разгледан именно такъв алгоритъм, но различното тук е вида на аналитичния израз на кривата. Използвани са кривината и торзията във функция на дължината на линията. Те се наричат естествени уравнения на кривата. Тези уравнения на кривината $\kappa(s)$ и торзията $\tau(s)$ на дадена крива са една форма на записване, която доста често се употребява в теорията и рядко в практиката, въпреки нейната универсалност и простота. Използването им позволява да погледнем по различен начин върху аналитичния запис, което ни дава интересни резултати.

Тук ще опишем движението на една точка по определена траектория в зависимост от естествения параметър s. В тримерното пространство всяка непрекъсната линия може да се представи като векторна функция $\mathbf{r}(t)$

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{I} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k},$$

където **i, j, k,** са единичните вектори, определящи ортогонална координатна система (нека това е координатната система на машината). А функциите x(t), y(t), z(t) съответстват на параметричното представяне на линията

$$\left|\begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{array}\right.$$

Трябва да заместим параметъра t с естествения параметър s. Можем да изразим дължината на линията като функция на параметъра t.

$$s(t) = \int |\mathbf{r}'(\tau)| d\tau$$

Може да се покаже, че s(t) е монотонна, непрекъсната и диференцируема. Следователно съществува обратната функция t(s). Тогава линията може да се зададе с естествен параметър.

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(s)$$

Във всяка точка на линията $\mathbf{r}(s)$ може да бъде определен придружаващ триедър – дясно ориентирана ортогонална координатна система, съставена от нормалния $\mathbf{n}$, бинормалния $\mathbf{b}$ и тангенциалния $\mathbf{t}$ вектори.

$$\left|\begin{array}{l} \mathbf{t} = \mathbf{r}' \\ \mathbf{n} = \mathbf{r}''/|\mathbf{r}''| \\ \mathbf{b} = \mathbf{r}' x \mathbf{r}''/|\mathbf{r}''| \end{array}\right.$$

Зависимостта между тези вектори, производните им и кривината и торзията се определя от формулата на Френе:

$$\left|\begin{array}{l} \mathbf{t}' = \kappa\mathbf{n} \\ \mathbf{n}' = -\kappa\mathbf{t}+\tau\mathbf{b} \\ \mathbf{b}' = -\tau\mathbf{n} \end{array}\right.$$

Решението на тази система диференциални уравнения в интервала $[k\Delta s,(k+1)\Delta s]$ може да се запише така

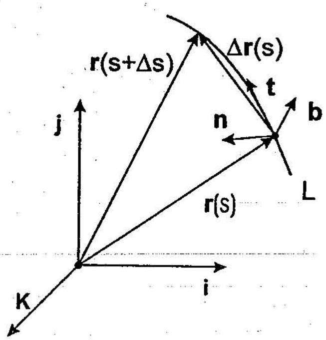
$$\left\|\begin{array}{c} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{array}\right\|_{k+1} = \Phi \left\|\begin{array}{c} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{array}\right\|_{k}$$

От друга страна можем да разложим радиус вектора $\mathbf{r}(s)$ в ред на Лоран.

$$\mathbf{r}(s+\Delta s) = \mathbf{r}(s) + \Delta s\mathbf{r}'(s)/1! + \Delta s\mathbf{r}''(s)/2! + \ldots$$

$$[\mathbf{r}(s+\Delta s) - \mathbf{r}(s)]/ \Delta s = \mathbf{r}'(s)/1! + \mathbf{r}''(s)/2! + \ldots$$

Изразът $[\mathbf{r}(s+\Delta s)-\mathbf{r}(s)]/\Delta s$, когато Δs е достатъчно малко, съответства на единичен вектор, който показва посоката на обхождане на линията на стъпки с дължина Δs.



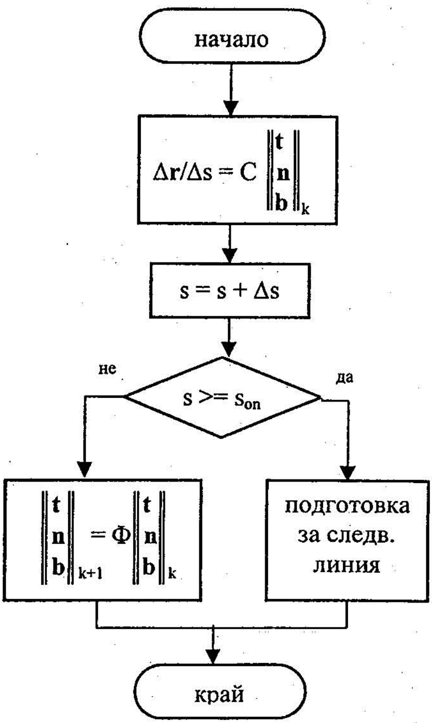
фиг.1

Заместваме производните на **r**(s) с векторите на придружаващия триедър според формулата на Френе и получаваме:

$$\Delta \mathbf{r}_k/\Delta s = C_k \begin{Vmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{Vmatrix}_k$$

Матриците Φ_k и C_k зависят само от текущите значения на $\kappa(s)\Delta s$ и $\tau(s)\Delta s$. Ако κ и τ са постоянни (при права, окръжност, витлова линия), то и матриците Ф и С ще са постоянни за всяка стъпка. Елементите на тези матрици в общия случай са редове, които могат да бъдат сметнати с желана точност или табулирани.

Алгоритъмът на интерполатора е твърде прост – свежда се до умножаване на векторите **t**, **n** и **b** с двете матрици Ф и С, като предварително трябва да бъдат изчислени началните стойности на тези вектори и дължината на контура s_{on}.



фиг. 2

Ще сравним този метод на интерполация с останалите традиционни методи по сложност на изчисленията, точност и универсалност.

Другите методи като метода с оценъчна функция, на цифровото диференциране, таблично-алгоритмичен и итерационен ползват прости изчисления свеждащи се до събиране и преместване, което е обусловено от наличието на бавни процесори в миналото. Сега с развитието на елементната база умноженията и деленията се извършват бързо като често са вградени апаратно в процесора. Затова не отдаваме голямо значение на по-големия брой умножения. Тригонометричните функции лесно могат да се табулират, тъй като аргумента им се изменя в тесни граници и е близък до 0.

Въпреки че формулите, по които се правят изчисленията, са рекурентни и по принцип бързо разпространяват и увеличават грешките, то тук грешката не е по голяма от методическата и инструменталната. Това се дължи на факта, че всички числа се изменят в интервала [-1,+1] и при умножаването на такива числа в резултата грешката се отмества в по-младши разряд или в най-лошия случай остава в същия разряд.

Предимството на този метод по универсалност е безспорно. Алгоритъмът не зависи от вида на линията – достатъчно е тя да се представи с естествените си уравнения. Изчисленията не зависят от координатната система, следователно липсват такива преобразувания. Тук при този алгоритъм движението се извършва на равни стъпки по дължината на линията и няма избор на водеща координата, както е при метода на оценъчната функция, и се избягват породените от това усложнения. Няма необходимост от преизчисляване на линейната скорост на всяка стъпка от движението, тъй като резултата е вектор, сочещ новата координата (отдалечена на стъпка Δs от старата), и е достатъчно да се умножи по желаната постоянна скорост.

Предложеният метод за интерполация има редица предимства, породени от приложената геометрична интерпретация на обектите, и недостатъци, които могат да се елиминират с използването на съвременна високотехнологична елементна база в системите за ЦПУ.

Литература

1. Грувер М., Зиммерс Е.,САПР и автоматизация производства Мир, 1987г.

2. Акопян А,Боянов Б, Теория на сплайн функциите, Наука и изкуство, 1990г.

3. Гелерт В., Кестнер Х., Нойбер З., Математически енциклопедичен речник, Наука и изкуство, 1983г.

4. http//www.ieee.org