# ПРОБЛЕМИ ПРИ ОЦЕНЯВАНЕ НА НАДЕЖДНОСТТА НА МИКРОЕЛЕКТРОННИТЕ ИЗДЕЛИЯ ПРИ НАЛИЧИЕ НА НЕЕДНОРОДНА АПРИОРНА ИНФОРМАЦИЯ

*гл. ас. д-р Нели Генчева Георгиева гл. ас. д-р Антон Славчев Георгиев*

**Технически университет - Варна**

***Abstract:*** **In the clause are examined means for using of Bayes's method of approach to calculate of nonparamitric empirical Bayes estimation of probability for flawless work of microelectronic devices (MED). Probability to apply this method at availability of data in kind of non-homogenous priori data is analyzed. Existence of field of study of insensibility is fixed, e.g. existence of this field of study in the prior definition, corrections within of which don't lead to corrections in estimations of probability for flawless work. Conclusion is made, that the more is higher reliability of explored devices, the more is stretched the limen of insensibility of applied Bayes's method.**

## I. ВЪВЕДЕНИЕ

В статията са изследвани възможностите за използуване на Байесовския подход за получаване на непараметрична емпирична оценка на вероятността за безотказна работа на микроелектронните изделия (МЕИ). Анализирана е възможността за прилагане на този подход при наличие на данни във вид на нееднородни пакети. Установено е съществуването на област на нечувствителност, т.е. съществуването на такава област в априорната неопределеност, измененията в границите на която не водят до изменения в оценките на вероятността за безотказна работа. Направена е констатация, че колкото е по-висока надеждността на изследваните изделия, толкова по-високо е разположен прага на нечувствителност на прилагания Байесовски подход.

## II. БАЙЕСОВСКА ПОДХОД ПРИ НЕПАРАМЕТРИЧНОТО ЕМПИРИЧНО ОЦЕНЯВАНЕ

Данните за надеждността на МЕИ в общия случай са във вид на нееднородни пакети информация $C_i$ [2]. Този вид информация се отнася пряко към показателя за надеждност $R_i$. Емпиричната Байесовска процедура се прилага, като за случаен параметър се използва неизвестната стойност $R_i$. За целта записваме съвместната априорна плътност $h(\Phi,\theta)$ във вида [3] :

$$h(\Phi,\theta) = h_1(\Phi)h_2(\theta|\Phi) = h_1(\Phi)t_0\exp[-(\theta-\Phi)t_0], \quad \begin{matrix} 0 \le \Phi < \infty \\ \Phi \le \theta < \infty \end{matrix} \qquad /1/$$

като $h_1(\Phi)$ е неизвестна величина. Използваме израза за правдоподобието:

$$l(\Phi,\theta|Д_i) = K(Д_i)\Phi^{r_i}\theta^{u_i}\exp[-(\Phi k_i + \theta\mu_i) \,, \qquad /2/$$

където: $r_i$е броя на отказите в матрицата $Д_i$,наблюдавани до момента $t_0$;

$u_i$-броя на отказите след момента $t_0$;

$к_i$-сумарната отработка при изпитванията до $t_0$;

$\mu_i$-сумарната отработка при изпитванията след $t_0$;

$K(Д_i)$-функция на данните, независеща от $\Phi$ и $\theta$.

Изчисляването на $r_i$, $u_i$, $к_i$, $\mu_i$ се извършва като се използват статистическите данни, вписани в матрицата $C_i$ от нееднородни данни [1]. Чрез израз /2/ и с помощта на теоремите на Байес определяме апостериорната плътност на параметрите:

$$h(\Phi,\theta|Д_i) \sim \Phi^{r_i}\theta^{u_i}\exp\left[-\left(\Phi k_i+\theta\mu_i\right)\right]h_1(\Phi)\exp\left[-\left(\theta-\Phi\right)t_0\right]. \qquad /3/$$

Отчитаме обстоятелството, че неизвестната вероятност за безотказна работа $R=R(t_0)=\exp(-\Phi t_0)$ зависи само от един параметър Φ, поради което от съвместната плътност $h(\Phi,\theta\,|\,Д_i)$ може да се изведе маргиналната апостериорна плътност:

$$h_1(\Phi|Д_i) = \int_{\Phi}^{\infty} h(\Phi,\theta|Д_i)d\theta \sim \Phi^{r_i}\exp[-\Phi(k_i+\mu_i)].$$

$$.\sum_{j=0}^{u_i}\frac{\Phi^{u_i-j}}{(u_i-j)!(\mu_i+t_0)^{j+1}}h_1(\Phi), \qquad 0\le\Phi<\infty \quad , \qquad /4/$$

и след това да се премине към апостериорната плътност на неизвестната вероятност за безотказна работа R, използвайки зависимостта $\Phi(R)=(-\ln R)/t_0$:

$$h_R(x|Д_i) = h(\Phi(x)|Д_i)\left|\Phi'(x)\right| \sim \left[\Phi(x)\right]^{r_i}\exp\left[-\Phi(x)(k_i+\mu_i)\right].$$

$$.\sum_{j=0}^{u_i}\frac{\left[\Phi(x)\right]^{u_i-j}}{(u_i-j)!(\mu_i+t_0)^{j+1}}\left\{h_1(\Phi(x))\left|\Phi'(x)\right|\right\}. \qquad /5/$$

Изразът, записан в големите скоби на отношението /5/ е маргиналната априорна плътност $h_R(x)$ за показателя R [5], която за конкретната задача е неизвестна величина. След преобразуване израза /5/ може да се опрости до вида:

$$h_R(x|Д_i) \sim h_R(x)x^{\omega_i} = \sum_{j=0}^{u_i}\frac{\left|\ln x\right|^{r_i+u_i-j}}{(u_i-j)!(\omega_{1i}+1)^{j+1}}. \qquad /6/$$

Получената апостериорна плътност /6/ за N-тата серия изпитвания (характеризираща се с резултати от изпитването МЕИ с еднородни данни за надеждността $Д_i$ ) дава възможност да бъде записана интересуващата ни точкова оценка на вероятността за безотказна работа на МЕИ:

$$\hat{R}_e^* = \frac{\sum_{i=1}^{N} n_i\hat{R}_i l_0\left(\hat{R}_i; r_N, u_N, \omega_N, \omega_{1N}\right)}{\sum_{i=1}^{N} n_i l_0\left(\hat{R}_i; r_N, u_N, \omega_N, \omega_{1N}\right)}, \qquad /7/$$

където:

$$l_0\left(\hat{R}_i; r_N, u_N, \omega_N, \omega_{1N}\right) = \hat{R}_i^{\omega_N}\sum_{j=0}^{u_N}\frac{\left|\ln\hat{R}_i\right|^{r_N+u_N-j}}{(u_N-j)!(\omega_{1N}+1)^{j+1}} \qquad /8/$$

При използването на израза /7/ за получаване на търсената точкова оценка на вероятността за безотказна работа, остават неизяснени два момента: **коя величина може да бъде използвана в качеството на оценка $\hat{R}_N$ и с какво може да бъде заменена неизвестната стойност за обема на извадката $n_i$** (с помощта на която бяха определени оценките $\hat{R}_N$, i=1÷N-1).

**I. За решението на първия въпрос** в качеството на оценка $\hat{R}_N$ използваме Байесовската оценка на вероятността за безотказна работа, определена въз основа на известните данни $Д_N$. За целта използваме апостериорната плътност /6/. Разглеждаме двете възможности:

А). Ако е зададена областта на априорната неопределеност $[\underline{R}_N, \overline{R}_N]$, то оценките $\hat{R}_N$ И $\sigma_{\hat{R}_N}$ се изчисляват по формулите [4]:

$$\hat{R}_N = \frac{J_1(\omega_N, \omega_{1N}, r_N + u_N, u_N)}{J_0(\omega_N, \omega_{1N}, r_N + u_N, u_N)}, \qquad /9/$$

$$\sigma^2_{\hat{R}_N} = \frac{J_2(\omega_N, \omega_{1N}, r_N + u_N, u_N)}{J_0(\omega_N, \omega_{1N}, r_N + u_N, u_N)} - \hat{R}^2_N, \qquad /10/$$

където:

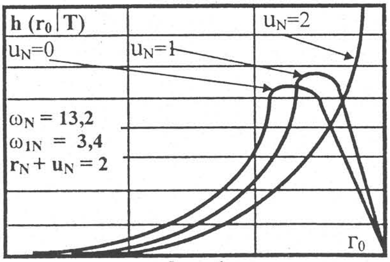
$$J_m(\omega_N, \omega_{1N}, r_N + u_N, u_N) = \sum_{j=0}^{u_N} \frac{(r_N + u_N - j)!}{(u_N - j)!(\omega_{1N} + 1)^{j+1}} \cdot$$

$$\cdot \sum_{i=0}^{r_N + u_N - j} \frac{\overline{R}_N^{\,\omega_N + m + 1} \left|\ln \overline{R}_N\right|^{r_N + u_N - j - i} - \underline{R}_N^{\,\omega_N + m + 1} \left|\ln \underline{R}_N\right|^{r_N + u_N - j - i}}{(r_N + u_N - j - i)!(\omega_N + m + 1)^{i+1}}. \qquad /11/$$

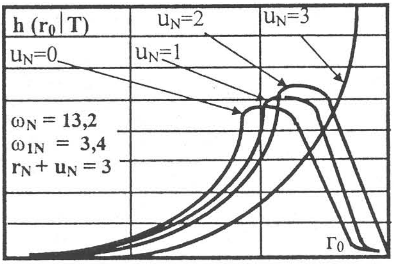
Практически интерес представлява изследването на апостериорното разпределение за оценявания показател за надеждност на МЕИ, в случая $t=t_0$. Поради монотонността на зависимостта $R(t_0)=\exp(-\lambda_{нач} t_0)$, априорната плътност на показателя $R(t_0)$ ще бъде:

$$h(r_0 | T) = \frac{r_0^{\omega_N}}{J_0(\omega_N, \omega_{1N}, r_N + u_N, u_N)} \sum_{j=0}^{u_N} u_N^{(j)} \frac{\left|\ln r_0\right|^{r_N + u_N - j}}{(\omega_{1N} + 1)^{j+1}}. \qquad /12/$$

На фиг. 1 и 2 са представени конкретни реализации на апостериорната плътност /12/ при фиксирани стойности на $\omega_N$ и $\omega_{iN}$ и различни стойности на $r_N+u_N$ и $u_N$.



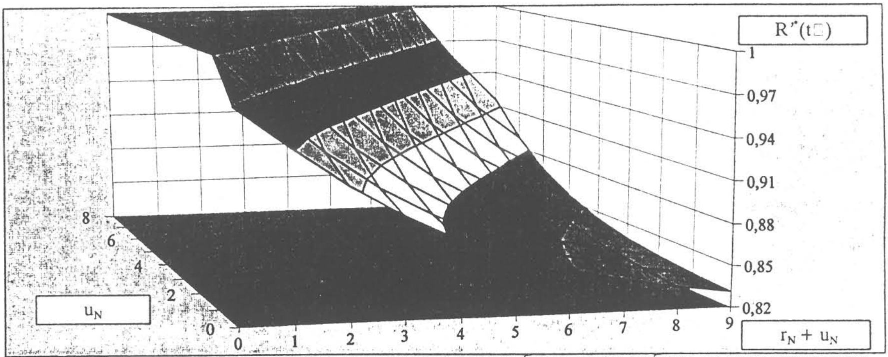

**фиг.1**



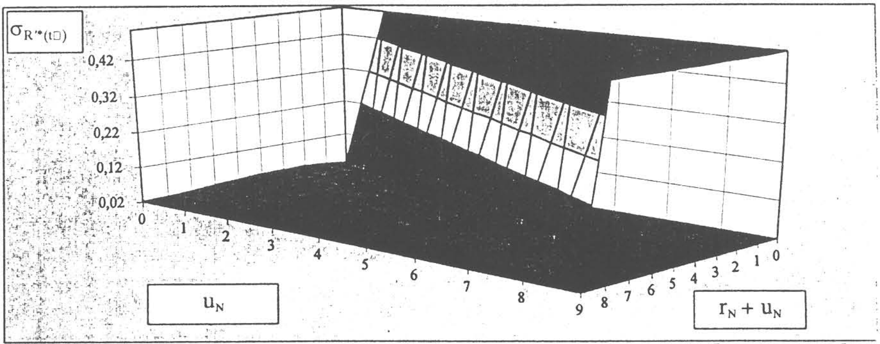

**фиг.2**

От графиките се вижда, че при постоянна стойност на $r_N+u_N$ с нарастване на $u_N$, ($u_N=0,1,2,3,\ldots$,но $u_N \le r_N+u_N$) кривата $h(r_0|T)$ се измества надясно, което съответства на по-висока апостериорна стойност на вероятността за безотказна работа на МЕИ, т.е. с нарастване на $u_N$ (при липса на промяна в останалите параметри) нараства частта на резултатите от изпитването, завършващи с откази след момента $t_0$, и намалява броя на отказите до момента $t_0$. Тази ситуация съответства на по-високо ниво на надеждността.

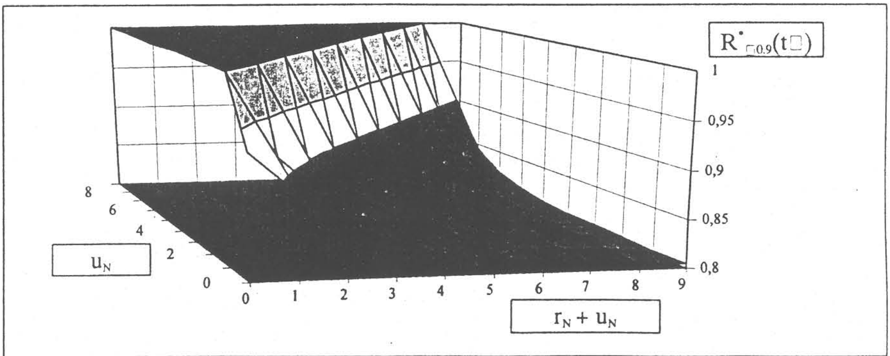
На фиг.3, фиг.4 и фиг.5 са представени резултатите от изчислените с помощта на формули /9/ и /10/ $\hat{R}^*(t_0)$, $\sigma_{\hat{R}^*(t_0)}$, $\underline{R}^*_\delta(t_0)$ за фиксирани извадки от 10 елемента и различни стойности на $r_N+u_N$ и $u_N$.




**фиг.3** Байесовска точкова оценка на вероятността за безотказна работа на микроелектронни изделия при $R_Д=0.8$, $R_Г=1$; $\omega_N=30.73$, $\omega_{1N}=11.13$




**фиг.4** Апостериорно средно квадратично отклонение на вероятността за безотказна работа на микроелектронни изделия при $R_Д=0.8$, $R_Г=1$; $\omega_N=30.73$, $\omega_{1N}=11.13$

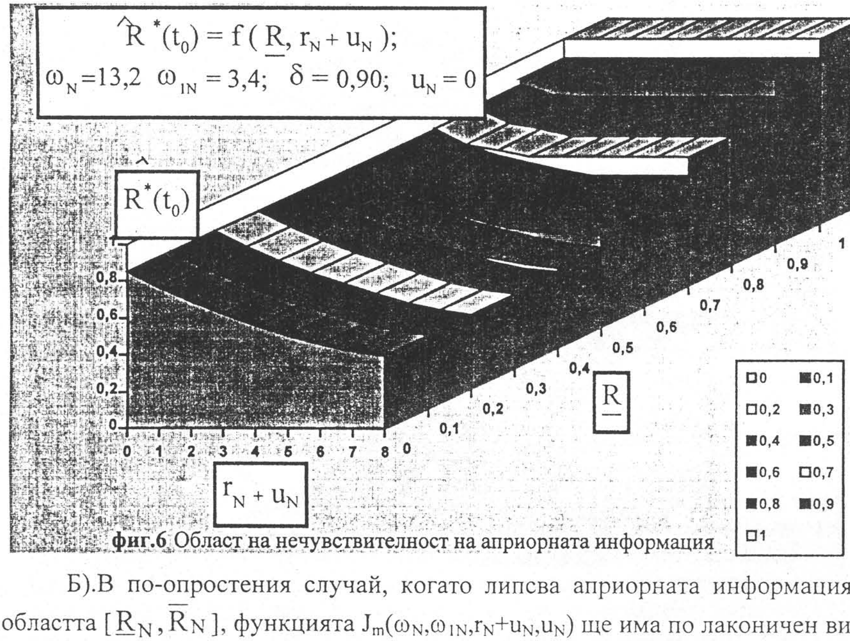



**фиг.5** Долна доверителна граница на Байесовската интервална оценка на вероятността за безотказна работа на микроелектронни изделия при $R_Д=0.8$, $R_Г=1$; $\omega_N=30.73$, $\omega_{1N}=11.13$

Анализът на графиките от фигури 4, 5 и 6 дава основание да бъдат направени следните констатации: с нарастване на $u_N$ при неизменяща се стойност на

$r_N+u_N$, стойността на $\hat{R}^*(t_0)$ и $\underline{R}^*_\delta(t_0)$ нарастват, което от своя страна налага извода, за асимптотична устойчивост на диагоналните елементи. Това означава, че с нарастване броя на отказите (в това число дори и тогава, когато всички откази настъпват след момента $t_0$, т.е. $r_N+u_N=u_N$, понеже откази до момента $t_0$ не са наблюдавани, $r_N=0$) Байесовските оценки, започвайки от някаква стойност не се изменят, ако стойностите на $\omega_N$ и $\omega_{1N}$ се запазят постоянни. Обяснението на този извод има следния смисъл, ако МЕИ бъде експлоатирано в течение на време $t_0$, то на стойността на вероятността за безотказна работа в момента $t_0$ не оказват влияние отказите, които биха се появили след този момент.

Това обстоятелство потвърждава гъвкавостта на Байесовската процедура. Многократните изчисления с цел оценяване вероятността за безотказна работа на МЕИ, позволяват да се открие област на нечувствителност на априорната информация, т.е. съществуването на такава област в априорната неопределеност, измененията в границите на която не водят до изменения в оценките на вероятността за безотказна работа. Този факт е илюстриран на фиг.6. От графиката се вижда, че колкото е по-малка стойността на $r_N+u_N$ (колкото е по-висока надеждността), толкова е по-високо разположен прага на нечувствителност.




**фиг.6** Област на нечувствителност на априорната информация

Б).В по-опростения случай, когато липсва априорната информация за областта $[\underline{R}_N, \overline{R}_N]$, функцията $J_m(\omega_N,\omega_{1N},r_N+u_N,u_N)$ ще има по лаконичен вид:

$$J_m(\omega_N,\omega_{1N},r_N+u_N,u_N) = \sum_{j=0}^{u_N} \frac{(r_N+u_N-j)!}{(u_N-j)!(\omega_{1N}+1)^{j+1}(\omega_N+m+1)^{r_N+u_N-j+1}} \qquad /13/$$

Изчисляването на оценките $\hat{R}_N$ и $\sigma_{\hat{R}_N}$ и в този случай е чрез изрази /9/ и /10/, но $J_m$ се определя вече не чрез израза /11/, а чрез /13/.

**II. По отношение отговора на втория въпрос**: с какво могат да бъдат заменени неизвестните обеми на извадките $n_i$, трябва да се отбележи, че тези величини съществуват в общата емпирична Байесовска процедура под формата на тегловни коефициенти, отразяващи значимостта на всяка оценка при апроксимация на апостериорното разпределение. Значимостта е толкова по-голяма, колкото е по-голям обема на извадката, използван при оценяването. Доколкото точността на получената оценка $\nu_i$ се явява еквивалентна на обема на извадката, в качеството на характеристика на значимостта на i-тата оценка, може да се използва именно тази точност:

$$\nu_i = \frac{1/\sigma_{\hat{R}_i}}{1/\sigma_{\hat{R}_1} + 1/\sigma_{\hat{R}_2} + \ldots + 1/\sigma_{\hat{R}_N}} \quad , \quad i = 1 \div N \cdot \qquad /14/$$

В подкрепа на подобно решение се явява факта, че за оценките е в сила твърдението $\sigma_{\hat{R}_i} \approx n_i^{-1}$.

Окончателно изразите за емпиричните Байесовски оценки за вероятността за безотказна работа на МЕИ добиват вида:

$$\hat{R}_e^* = \frac{\sum_{i=1}^{N} \nu_i \hat{R}_i l_0\left(\hat{R}_i; r_N, u_N, \omega_N, \omega_{1N}\right)}{\sum_{i=1}^{N} \nu_i l_0\left(\hat{R}_i; r_N, u_N, \omega_N, \omega_{1N}\right)} , \qquad /15/$$

$$\sigma^2_{\hat{R}_e^*} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \nu_i \hat{R}_i^2 l_0\left(\hat{R}_i; r_N, u_N, \omega_N, \omega_{1N}\right)}{\sum_{i=1}^{N} \nu_i l_0\left(\hat{R}_i; r_N, u_N, \omega_N, \omega_{1N}\right)} - \hat{R}_e^{*2} , \qquad /16/$$

където $l_0(\hat{R}_i; r_N, u_N, w_N, w_{1N})$ се определя с помощта на израз /8/.

**III. ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

В статията са изследвани проблемите свързани с оценяването на надеждността на микроелектронните изделия при наличие на нееднородна априорна информация. Анализирани са резултатите от направените статистически експерименти и е установено съществуването на такава област в априорната неопределеност, измененията в границите на която не водят до изменения в оценките на вероятността за безотказна работа.

**ЛИТЕРАТУРА:**


[1] Георгиева Н.Г. Байесовска оценка на вероятността за безотказна работа на микроелектронните изделия. Пета ННПК с МУ "Електронна техника (ЕТ'96)", Созопол, 27-29.09.1996.стр. 124-129.

[2] Ferguson T.S.Bayesian analysis of some nonparametric problems//Ann.Statist.1973, V1, №2.

[3] Lloyd E., W.Ledermann. Handlook of aplicable mathematics. Volume VI.Statistics.Part B.John Wiley & sons. ChichesterNew YorkBrisbaneTorontoSingapore, 1994.

[4] Martz H.F., M.G.Lian.Empirical Bayes estimation of the binomial parameter//Biometrica, 1975, V.62.

[5] Phadia E.G. Anote on empirical Bayes estimation of a distribution function based on censored data, Ann.Statist, 1990, V8, №1.