

МНОГОКРИТЕРИЙНО ОПТИМИЗАЦИОННО ПРОЕКТИРАНЕ НА ДВУМЕРНИ РЕКУРСИВНИ ЦИФРОВИ ФИЛТРИ

гл.ас. д-р инж. Стела Ангелова Стефанова,
ТУ Електронни системи към ТУ, София

This work considers one approach for multicriterion optimization design of 2-D spherically symmetrical IIR digital filters. The approximation problem is stated with requirements for selectivity of magnitude response, linearity of phase response and finite impulse response, which provides stability of 2-D IIR digital filter. The conflicting behavior of frequency characteristics and impulse response allows the simultaneous approximation problem to be stated as multicriterion optimization problem. The semi-infinite optimization is used for design of lowpass spherically symmetrical IIR digital filter. Some numerical results and graphical representations are given.

1. Увод

В статията е представен алгоритъм за оптимизационно проектиране на двумерни (2-D) сферично-симетрични рекурсивни цифрови филтри (РЦФ). Известно е, че проблемът за линейна фазово-честотна характеристика (ФЧХ) или постоянно групово време на закъснение е твърде важен при проектирането както на едномерни така и на двумерни РЦФ. В последните години са публикувани голям брой статии, разглеждащи въпроса за проектирането на 2-D РЦФ при поставени изисквания към амплитудно-честотната характеристика (АЧХ) и условие за линейност на ФЧХ. Минимаксен метод е използван в [1] за решаване на синтезната задача за двумерни нерекурсивни филтри с линейна фаза. Друга техника за проектиране на многомерни сферично-симетрични РЦФ при поставени изисквания към АЧХ и постоянно групово време на закъснение е описана в [2], при която числителя и знаменателя на предавателната функция (ПФ) се получават поотделно. В [3] е предложен оптимизационен подход на базата на метод на Нютон за проектиране на двумерни рекурсивни и нерекурсивни цифрови филтри с безкрайна и крайна дължина на думата. Цифрова спектрална трансформация е използвана в [4], която е приложена към едномерен прототип с линейна ФЧХ за да се реализира двумерен РЦФ.

Методът на проектиране, предложен в настоящата статия, е базиран на задачата за полубезкрайна оптимизация. Статията е структурирана по следния начин. Апроксимационната задача е формулирана в раздел 2 по отношение и на реалната и имагинерната част на ПФ на РЦФ по такъв начин, че целевата функция е изпъкнала функция на вектора от оптимизируеми параметри, формиран от коефициентите на ПФ. Този

подход за апроксимация на АЧХ, ФЧХ и импулсната характеристика се състои във формулиране на полубезкрайна оптимизационна задача, описана в раздел 3, с една целева функция и едно функционално ограничение. В последния раздел е даден илюстративен пример за проектиране на нискочестотен двумерен РЦФ с линейна ФЧХ и ограничена импулсна характеристика с изисквания към продължителността на преходния процес.

2. Формулиране на апроксимационната задача за двумерни РЦФ

ПФ на 2-D сферично-симетричен РЦФ се задава във вида:

$$H(\omega_1, \omega_2) = \frac{c(0,0) + \sum_{l=1}^{N_c} c(0,l) e^{-jl\omega_2} + \sum_{k=1}^{M_c} \sum_{l=1}^{N_c} c(k,l) e^{-j(k\omega_1 + l\omega_2)}}{1 + \sum_{l=1}^{N_c} e(0,l) e^{-jl\omega_2} + \sum_{k=1}^{M_c} \sum_{l=1}^{N_c} e(k,l) e^{-j(k\omega_1 + l\omega_2)}} \quad (1)$$

където $L_c, M_c, N_c, L_c, M_c,$ и N_c са положителни числа, които се избират от проектанта, $c(\cdot, \cdot), e(\cdot, \cdot)$ са реални числа, $(\omega_1, \omega_2) \in D \subset \mathbb{R}^2$, D е множество, определено от зададените изисквания към РЦФ.

2.1. Апроксимация на АЧХ и ФЧХ

Равенство (1) може също така да бъде записано в следната форма:

$$H(\omega_1, \omega_2) = \frac{N(\omega_1, \omega_2)}{D(\omega_1, \omega_2)} = \frac{H_{RN}(\omega_1, \omega_2) + jH_{IN}(\omega_1, \omega_2)}{H_{RD}(\omega_1, \omega_2) + jH_{ID}(\omega_1, \omega_2)} = H_R(\omega_1, \omega_2) + jH_I(\omega_1, \omega_2)$$

Нека $Y_R(\omega_1, \omega_2)$ и $Y_I(\omega_1, \omega_2)$ са респективно реалната и имагинерната част на желаните стойности на ПФ на РЦФ в $(\omega_1, \omega_2) \in D$.

Дефинира се функция на грешката по следния начин [3] :

$$ER(\omega_1, \omega_2) = H(\omega_1, \omega_2) - [Y_R(\omega_1, \omega_2) - jY_I(\omega_1, \omega_2)] \quad (2)$$

тогава
$$ER(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{D(\omega_1, \omega_2)} [E_1(\omega_1, \omega_2) - jE_2(\omega_1, \omega_2)]$$
, като (3)

$$E_1(\omega_1, \omega_2) = H_{RN}(\omega_1, \omega_2) - H_{RD}(\omega_1, \omega_2)Y_R(\omega_1, \omega_2) + H_{ID}(\omega_1, \omega_2)Y_I(\omega_1, \omega_2)$$

$$E_2(\omega_1, \omega_2) = H_{IN}(\omega_1, \omega_2) - H_{ID}(\omega_1, \omega_2)Y_R(\omega_1, \omega_2) - H_{RD}(\omega_1, \omega_2)Y_I(\omega_1, \omega_2)$$

Нека $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ да бъде векторът от оптимизируеми параметри, чийто елементи са коефициентите на ПФ на филтъра (1), подредени по редове, като се започва от коефициентите в числителя и се завършва с коефициентите на знаменателя. Нека $J(\mathbf{x})$ да бъде ограничението, при което се решава оптимизационната задача, и което се задава във вида:

$$J(\mathbf{x}, \omega_1, \omega_2) = E_1^2(\omega_1, \omega_2) + E_2^2(\omega_1, \omega_2) \quad (4)$$

2.2. Апроксимация на импулсната характеристика

Импулсната характеристика на двумерен РЦФ се получава чрез обратно двумерно преобразуване на Фурие на предавателната функция $H(\omega_1, \omega_2)$.

$$h(n_1, n_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(\omega_1, \omega_2) \exp(j\omega_1 n_1 + j\omega_2 n_2) d\omega_1 d\omega_2 \quad (5)$$

Обратното двумерно преобразуване на Фурие се апроксимира с бързо преобразуване на Фурие и се изчислява с процедурата `iff2` от **PC MATLAB**.

Образува се средноквадратична грешка между получената по този начин импулсна характеристика и желана функция еталон.

$$E_3(\mathbf{x}) = \sum_{n_1=0}^{N_1} [h(n_1, n_2) - h_c(n_1, n_2)]^2 \quad (6)$$

където \mathbf{x} е вектор от коефициенти на ПФ и $h_c(n_1)$ е функцията еталон.

3. Алгоритъм за решаване на апроксимационната задача

Основната идея на метода се състои в оптимизация на една целева функция при едно или няколко функционални ограничения.

Задачата за апроксимация на характеристиките на двумерен РЦФ е поставена като задача за полубезкрайна оптимизация във вида:

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n} E_3(\mathbf{x}) \quad (7)$$

при ограничение $J(\mathbf{x}, \omega_1, \omega_2) \leq \delta$, за всички точки $(\omega_1, \omega_2) \in \mathbf{D} \subset \mathbf{R}^2$ където \mathbf{x} е вектор от оптимизируеми параметри. \mathbf{D} е област, в която се изменят независимите променливи ω_1, ω_2 . $J(\mathbf{x}, \omega_1, \omega_2)$ е непрекъсната функция на \mathbf{x} и на променливите ω_1, ω_2 .

Целта е да се минимизира $E_3(\mathbf{x})$ така, че ограничението $J(\mathbf{x}, \omega_1, \omega_2)$ да се удовлетворява за всички възможни стойности на $(\omega_1, \omega_2) \in \mathbf{D}$.

Алгоритъмът за решаване на тази задача е реализиран с процедура `seminf` от "Optimization Toolbox" на **PC MATLAB** [5].

4. Проектиране на нискочестотен, двумерен сферично-симетричен РЦФ

Зададени са следните изисквания към АЧХ на двумерния РЦФ:

$$\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} \leq 0.4\pi \quad \text{- лента на пропускане}$$

$$\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} > 0.6\pi \quad \text{- лента на непропускане}$$

За да се постигне линейна ФЧХ трябва да бъде изпълнено условието:

$$\frac{Y_i(\omega_1, \omega_2)}{Y_R(\omega_1, \omega_2)} = \tan \left[\phi_1 \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} + \phi_0 \right], \quad (8)$$

където ϕ_1 и ϕ_2 са константи, като в случая $\phi_1 = -1$ и $\phi_2 = 0$.

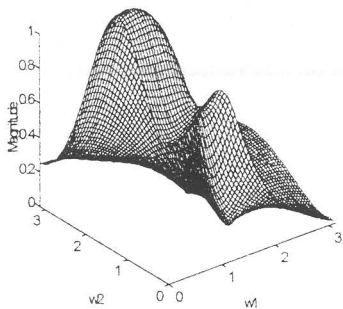
Липсата на затихване на сигнала в лентата на пропускане (т.е. квадрата на модула на ПФ да бъде равен на 1) се осигурява, като се удовлетворява изискването:

$$Y_R(\omega_1, \omega_2)^2 + Y_I(\omega_1, \omega_2)^2 = 1 \quad (9)$$

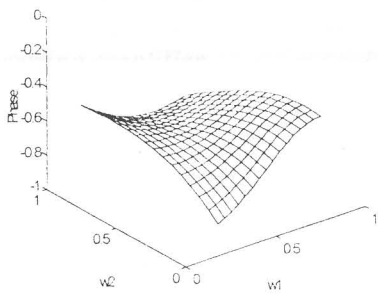
Получени са две решения, които демонстрират конфликтният характер на изменение на АЧХ, ФЧХ и импулсната характеристика на двумерния РЦФ. На първото решение (случай 1) съответстват фигури 1 а, б, в и г. Както се вижда от фиг. 1а, АЧХ на този филтър не удовлетворява изцяло изискванията за добра селективност, но се отличава с добра форма на импулсната характеристика, съответстваща на бърз и стръмен преходен процес. Това най-добре се наблюдава на фиг. 1в, представляваща сечение на повърхнината на импулсната характеристика (при $n_2 = 0$). На второто решение (случай 2) съответстват фигури 2а б в и г, а в таблица 1 са дадени коефициентите на числителя и на знаменателя на ПФ. Вторият случай съответства на филтър с добро поведение на АЧХ в лентата на пропускане, което удовлетворява в голяма степен изискванията към тази характеристика, но това от своя страна предизвиква силно влошаване на преходния процес, което ясно личи от фиг. 2в. Изисквания за линейност на ФЧХ също влияят върху формата на АЧХ, като предизвикват влошаване на поведението ѝ. Сравнението на двете решения доказва конфликтният характер на изменение на АЧХ, ФЧХ и импулсната характеристика. Всяко едно от тях представлява компромис в удовлетворяването на изискванията за добра селективност, линейна фаза и кратък и стръмен преходен процес.

Таблица 1

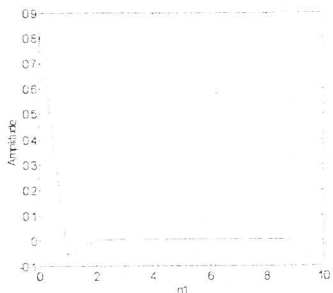
(i,j)	c(i,j)	e(i,j)	(i,j)	c(i,j)	e(i,j)
(0,0)	0.1729	1.0000	(2,1)	0.0883	0.1094
(0,1)	0.0917	-0.1739	(2,2)	0.0650	0.0784
(0,2)	0.0564	0.1073	(1,-1)	0.0105	-0.1659
(1,0)	0.0949	-0.2974	(1,-2)	0.0339	-0.0031
(1,1)	0.1367	-0.1446	(2,-1)	-0.0553	0.1567
(1,2)	0.0748	-0.0883	(2,-2)	0.0017	0.0051
(2,0)	0.0766	0.1099			



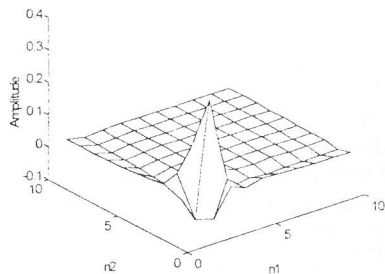
Фиг. 1а. АЧХ на НЧ 2-D РЦФ (случай 1)



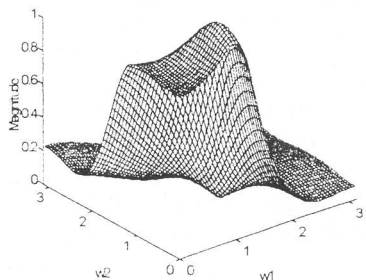
Фиг. 1 б. ФЧХ на НЧ 2-D РЦФ (случай 1)



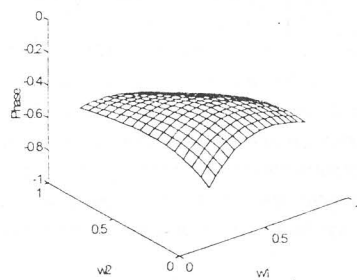
Фиг. 1 в. Сечение ($n_2=0$) на импулсната характеристика (случай 1)



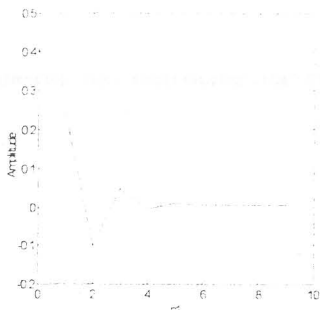
Фиг. 1 г. Импулсна характеристика на 2-D РЦФ (случай 1)



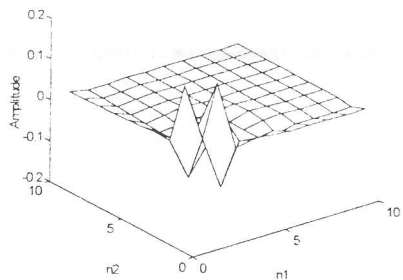
Фиг. 2 а. АЧХ на НЧ 2-D РЦФ (случай 2)



Фиг. 2 б. ФЧХ на НЧ 2-D РЦФ (случай 2)



Фиг. 2 в. Сечение ($n_2=0$) на импулсната характеристика (случай 2)



Фиг. 2 г. Импулсна характеристика на на 2-D РЦФ (случай 2)

5. Използувана литература

1. Charalambous C., H. Khreishi, Minimax Design of 2D FIR Linear Phase Digital Filters, IEE Proceedings, Vol. 135, Pt. G, No. 5, October 1988, pp. 194-202.
2. Kwan H.K., C.L. Chan, Multidimensional Spherically Symmetric Recursive Digital Filter Design Satisfying Prescribed Magnitude and Constant Group Delay Responses, IEE Proceedings, Vol. 134, Pt. G, No. 4, August 1987, pp. 187-193.
3. Lampopoulos G.A., M.M. Fahmy, A New Technique for Design of Two-Dimensional FIR and IIR Filters, IEEE Trans. On Acoustics, Speech and Signal Processing, Vol. ASSP-33, No. 1, February 1985.
4. Shenoj B.A., P. Misra, Design of Two-Dimensional IIR Digital Filters with Linear Phase, IEEE Trans. On Circuits and Systems-II: Analog and Digital Signal Processing, Vol. 42, No. 2, February 1995, pp.124-129.
5. User's Guide "Optimization Toolbox" for Use MATLAB, Mathworks Inc.,1994.