

ТРИМЕРЕН ЧИСЛЕН АНАЛИЗ НА ИНДУКЦИОННИ НАГРЕВАТЕЛИ С ИЗПОЛЗВАНЕ НА МЕТОДА С ЕДЖ-ЕЛЕМЕНТИ¹

Марин Димитров, Павел Минчев, Стоимен Балинов
Институт по металознание - БАН

THREE-DIMENSIONAL EDGE ELEMENT NUMERICAL ANALYSIS OF INDUCTION HEATERS

Marin Dimitrov, Pavel Minchev, Stoimen Balinov
Institute of Metal Science - Bulgarian Academy of Sciences

Abstract

Three-dimensional edge element numerical analysis of the electromagnetic field in induction heating systems supplied by electronic frequency converters is investigated. In the edge element method the approximation of the electromagnetic field is made by means of circulations of vector magnetic potential on the edges of tetrahedron finite elements. Thus tangential continuity of the vector field is imposed and the over-continuity, which often leads to errors, is avoided. The accuracy and the convergence of the iteration process are studied. The results of the modeling are compared with those obtained by the finite element method.

УВОД

В последно време се развива методът с едж-елементи, създаден на базата на метода на крайни елементи [1,2]. При използването на метода с едж-елементи за решаване на примерни електромагнитни задачи се осигурява тангенциална непрекъснатост на векторното поле. Избягва се свърхнепрекъснатостта, характерна за метода с крайни елементи, която води често до съществени грешки в изчисленията.

Прилагането на метода с едж-елементи е свързано с определени затруднения. В [3] се съобщава за лоша сходимост при решаването на магнитостатични проблеми. В [4] областта на интегриране е разделена на почти равностенни тетраедрални елементи и по този начин е получено съществено подобряване на сходимостта. В [5] е установено, че методът е чувствителен към точността, с която се осигуряват условията за непрекъснатост на плътността на намагнитващия ток.

Представява интерес изследването на сходимостта и точността на метода с едж-елементи (МЕЕ) при изчисляване на електрическите параметри на индукционни нагреватели и сравнението с други числени методи.

¹ Разработката е частично финансирана от Националния фонд "Научни изследвания"

В настоящата работа са разработени алгоритъм и компютърна програма за примерен числен анализ на електромагнитното поле в системи с вихрови токове по МЕЕ. Изследвана е електромагнитна система, съдържаща индуктор и нагривани тела. Резултатите са сравнени с числени данни за същата система, получени по метода с крайни елементи (МКЕ).

ФОРМУЛИРОВКА НА ПРОБЛЕМА И АЛГОРИТЪМ ЗА ИЗЧИСЛЕНИЕ

Използва се следното уравнение за векторния магнитен потенциал A :

$$(1) \quad \text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \text{rot } A \right) + j\omega\sigma A = J_S$$

където μ е магнитна проницаемост, ω - кръгова честота, σ - електропроводимост, J_S - плътност на намагнитващия ток, j - имагинерната единица.

След прилагане метода на Галеркин уравнението (1) се преобразува във функционала:

$$(2) \quad \int_{\Omega} (\mu^{-1} \text{rot } A) \cdot (\text{rot } W) d\Omega + \int_{\Omega} j\omega\sigma A \cdot W d\Omega = \int_S W \times (\mu^{-1} \text{rot } A) \cdot dS + \int_{\Omega} J_S \cdot W d\Omega,$$

където W е тегловна функция, Ω е област на интегриране, S е повърхност, ограничаваща областта на интегриране.

Методът с едж-елементи се характеризира с това, че областта на интегриране се разделя на тетраедрални крайни елементи, като апроксимацията на магнитното поле се извършва посредством циркулациите A_e на векторния магнитен потенциал по ръбовете на елементите.

Тегловната функция W за ръб, свързващ върхове с номера i и j се определя като [1,2]:

$$(3) \quad W = \zeta_i \nabla \zeta_j - \zeta_j \nabla \zeta_i,$$

където ζ е функция на формата, известна от метода с крайни елементи.

За определяне на A , J_S и $\text{rot } A$ в границите на един краен елемент се използват следните съотношения [1,2]:

$$(4) \quad A = \sum_{e=1}^6 A_e W_e; \quad J_S = \sum_{e=1}^6 J_S^e W_e$$

$$(5) \quad \text{rot } A = \sum_{e=1}^6 A_e \text{rot } W_e; \quad \text{rot } W_e = 2 \nabla \zeta_i \times \nabla \zeta_j,$$

където e е локален номер на рѣба, J_S^e е циркулация на J_S по рѣба с номер e .

С помощта на (2), (4), (5) и (6) може да бъде съставена система от алгебрични уравнения, апроксимираща (1).

Алгоритъмът за изчисление включва следните етапи:

- Разделяне областта на интегриране на тетраедрални елементи. В настоящата работа първоначално областта се разделя на хексаедрални елементи, а след това всеки хексаедър се разделя на 6 тетраедъра в съответствие със схемата, показана на фиг. 1.

- Изчисляване коефициентите и свободните членове на системата алгебрични уравнения.

- Решаване на системата алгебрични уравнения с помощта на итерационна процедура, известна като *Incomplete Cholesky-Conjugate Gradient (ICCG) Method* [6]. Точността се оценява посредством относителна евклидова норма на остатъците e_i , която представлява отношение на евклидовите норми на остатъците и свободните членове [7].

- Изчисляване на комплексната мощност като сума от мощностите във всеки тетраедрален елемент.

ЧИСЛЕНИ РЕЗУЛТАТИ

Разработена е компютърна програма на FORTRAN, реализираща описания алгоритъм.

Изследвана е електромагнитна система, фиг. 2, която съдържа отрязък с височина 10 mm от овален индуктор 1 за едновременно нагряване на немагнитни детайли 2 с квадратно сечение. Индукторът е снабден с външен магнитен екран.

Съществуващите равнини на симетрия и наличието на магнитен екран позволяват областта на интегриране Ω да бъде ограничена в пространството, отбелязано на чертежа с вертикална штриховка.

Областта Ω е представена отделно на фиг. 2, като са отбелязани и граничните условия. С n е означена външната нормала към съответната повърхност. Показано е разположението на координатната система (x, y, z) и началното разделяне на 700 хексаедрални елемента. Всеки хексаедър представлява куб със страна 2 mm. Броят на тетраедрите е 4200.

Разделянето на Ω е благоприятно от гледна точка използването на МЕЕ, тъй като хексаедрите са почти равностенни. Друго благоприятно обстоятелство е непрекъснатостта на намагнитващия ток в изчислителната схема.

Моделирането е извършено при следните изходни данни:

- работна честота $f = 8000 \text{ Hz}$;

- ток в индуктора $I_i = 2000 \text{ A}$;

- електропроводимост на материала на детайлите
 $\sigma = 10^6 (\Omega m)^{-1}$.

С оглед оценка на сходимостта и точността, извършено е повторно моделиране по МКЕ и с използване на калибрирана система диференциални уравнения за векторния магнитен потенциал [7]. Известно е, че тази формулировка на МКЕ осигурява достатъчна точност при моделиране на електромагнитни системи, които не съдържат феромагнитни области, а от друга страна се характеризира с много добра сходимост [7]. Тримерният числен анализ по МКЕ се извършва на базата на първоначалното разделяне на областта на интегриране на хексаедрални крайни елементи, фиг. 3.

Параметрите на изчислителния процес и резултатите от изчислението са дадени в табл. 1. Необходимият брой итерации за постигане на една и съща относителна евклидова норма на остатъците е приблизително 3,5 пъти по-голям при МЕЕ в сравнение с МКЕ, докато съотношението между времената, необходими за изпълнение на итерационния цикъл, е $\approx 1,5$. Това може да се обясни с по-големия брой ненулеви коефициенти в системата алгебрични уравнения, получена от прилагането на МКЕ.

Таблица 1.

Параметри на изчислителния процес и резултати от изчислението	МЕЕ	МКЕ
Размер на системата алгебрични уравнения	5085	2478
Брой на ненулевите коефициенти	75511	155168
Относителна евклидова норма	<0,001	<0,001
Брой на ICCG итерациите	82	24
Продължителност на итерационния цикъл (процесор Pentium 166), s	23	15
Активна мощност, W	1828	2013
Реактивна мощност, VA	9118	8670

Точността на МЕЕ при изчисляване на електрическите параметри на индуктор с немагнитни нагривани тела е достатъчна. Разликите между резултатите от изчислението на активната и реактивната мощности по МЕЕ и МКЕ не превишават 10%.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

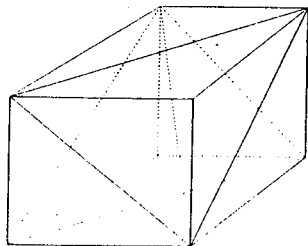
Разработени са алгоритъм и компютърна програма за тримерен числен анализ на индукционни нагреватели по метода с едж-елементи. При моделиране на системи, съдържащи индуктор и немагнитно нагривано тяло е получена достатъчна точност. Сходимостта е близка до тази на метода с крайни елементи и използване на

калибрирани диференциални уравнения за векторния магнитен потенциал.

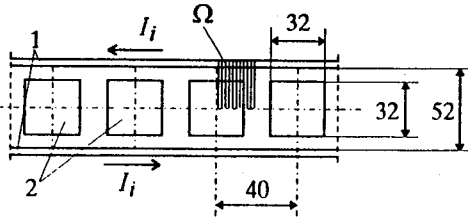
Проведеното изследване потвърждава необходимостта от разделяне на областта на интегриране на почти равностенни тетраедри и спазване условията за непрекъснатост на намагнитващия ток, с оглед постигане достатъчни точност и сходимост на метода с едж-елементи.

ЛИТЕРАТУРА

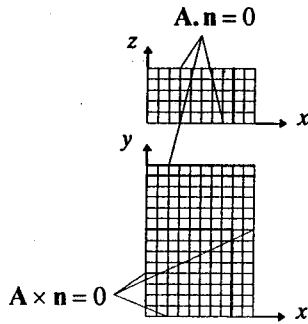
1. Bossavit, A. Whitney Forms: a Class of Finite Elements for Three-Dimensional Computations in Electromagnetism.- IEE Proc. A, 135, 1988, No 8, 493-500.
2. Bossavit, A. Edge-Elements for Scattering Problems.- EDF Bulletin de la direction des études et recherches. Serie C Méthématique Informatique, 1989, No 2, 17-33.
3. Preis, K., I. Bardi, O. Biro, C. Magele, G. Vrisk, K.R. Richter. Different Finite Element Formulations of 3D Magnetostatic Fields.- IEEE Trans. on Mag., 28, 1992, No 2, 1056-1059.
4. Goliás, N., T. Tsiboukis. 3-D Eddy-Current Computation with a Self-Adaptive Refinement Technique.- IEEE Trans. on Mag., 31, 1995, No 3, 2261-2268.
5. Fujjwara, K., T. Nakata, N. Takahashi, H. Ohashi. On the Continuity of the Magnetizing Current Density in 3-D Magnetic Field Analysis with Edge Element.- IEEE Trans. on Mag., 31, 1995, NO 3, 1364-1367.
6. Kershaw, D. The Incomplete Cholesky-Conjugate Gradient Method for the Iterative Solution of Systems of Linear Equations.- Journal of Computational Physics, 1978, No 26, 43-65.
7. Biro, O., K. Preis. On the Use of the Magnetic Vector Potential in the Finite Element Analysis of the Three-Dimensional Eddy Currents.- IEEE Trans. on Mag., 25, 1989, No 4, 3145-3159.



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3