ПРОЕКТИРАНЕ НА РЕКУРСИВНИ ЦИФРОВИ ФИЛТРИ ЧРЕЗ ПОЛУБЕЗКРАЙНА ОПТИМИЗАЦИЯ

гл.ас. д-р Стела Ангелова Стефанова, ЕТУ ЕС към ТУ София

In this work one approach for design of recursive (IIR) digital filters in frequency and time domain is presented. The basic idea of this approach is to state the simultaneous approximation design problem as semi-infinite optimization problem with one objective function and two functional constrains. The magnitude response is defined as optimizing characteristic, but the group delay and step response requirements are used as functional constraints. Some numerical results for lowpass IIR digital filter design are given.

В настоящата работа се предлага подход за проектиране на рекурсивни цифрови филтри (РЦФ) чрез едновременна апроксимация във времева и честотна област. Основната идея на този подход е да се сведе проблемът едновременна апроксимация на честотните и времеви характеристики на РЦФ до задача на полубезкрайната оптимизация. Известен факт е конфликтният характер на изменение на амплитудно-честотната характеристика (АЧХ) и фазовочестотната характеристика (ФЧХ) на РЦФ [1,3]. Постигането на добра селективност на РЦФ е свързано с получаването на силно нелинейна ФЧХ. За да се минимизира фазовата нелинейност на РЦФ се оценява варирането на характеристиката на груповото време на закъснение около желана фунция-еталон. Поведението на РЦФ във времева област се изследва чрез преходната характеристика.

Задачата за едновременна апроксимация на честотни и времеви характеристики на РЦФ е формулирана като задача на полубезкрайна оптимизация с една целева фунция и две функционални ограничения. Целевата фунция е дефинирана по отношение на АЧХ , а изискванията към характеристиката на груповото време на закъснение и преходната характеристика определят функционалните ограничения.

Настоящата статия е структурирана както следва: Раздел I представлява постановка на апроксимационната задача. Раздел II е посветен на полубезкрайната оптимизация като метод за проектиране на РЦФ. В раздел III са дадени числени резултати от проектирането на нискочестотени РЦФ.

I. Постановка на апроксимационната задача

За реализация на РЦФ е избрана каксадна структура, чиято предавателна функция (ПФ) се записва в следната математическа форма [1,3]:

$$H(z) = h_0 \prod_{k=1}^{K} \frac{1+a_k z^{-1} + b_k z^{-2}}{1+c_k z^{-1} + d_k z^{-2}} = h_0 \prod_{k=1}^{K} \frac{(z-z_{ok})(z-z_{ok}^*)}{(z-z_{pk})(z-z_{pk}^*)} \qquad (1)$$

където $z_{ok}, z_{ok}^*, z_{pk}, z_{pk}^*$ са комплексно спрегнатите двойки нули и полюси на ПФ

Нека с $\mathbf{x}$ да бъде означен векторът от оптимизируеми параметри $\mathbf{x} \in \mathbf{X} \subseteq \mathbf{R}^n$. Като негови компоненти са използувани полярните координати на нулите и полюсите с фази, изменящи се в интервала $[0,\pi]$.

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T = \\ = (r_{o1}, \phi_{o1}, r_{p1}, \phi_{p1}, \ldots, r_{ok}, \phi_{ok}, r_{pk}, \phi_{pk}, \ldots, h_o)^T \qquad (2)$$

Предавателната функция (1) може да бъде записана във вида:

$$H(e^{j\phi}) = M(\mathbf{x}, \phi)\, e^{j\theta(\mathbf{x},\phi)} \qquad (3)$$

където $M(\mathbf{x}, \phi) = \left| H(e^{j\phi}) \right|$ е АЧХ (4)

$\theta(\mathbf{x}, \phi) = Arg\, H(e^{j\phi})$ е ФЧХ

$\tau(\mathbf{x}, \phi) = -\dfrac{d}{d\omega}\left[Arg\, H(e^{j\phi}) \right]$ е ХГВЗ (5)

$\phi_i = \omega T = 2\pi f / f_s$ е нормираната честота, като f_s е честотата, а T периода на дискретизация

$h(\mathbf{x}, n) \quad n = 1, 2, \ldots N$ е преходната характеристика (6)

За всяка от трите характеристики (4), (5) и (6) се определя функция-еталон, означена съответно с $M_0(\phi), \tau_0(\phi), h_0(n)$, които задават изискванията към проектирания цифров филтър. Чрез тези функции се дефинират критерия и ограниченията в оптимизационната задача.

Множеството от допустими решения на оптимизационната задача $\mathbf{X} \subset \mathbf{R}^n$ се дефинира от ограничения върху вектора от оптимизируеми параметри по следния начин:

$$\mathbf{X}: \begin{cases} 0 \langle \varphi_{ok} \langle \pi \\ 0 \langle \varphi_{pk} \langle \pi \\ 0 \langle r_{ok} \langle 1 \\ 0 \langle r_{pk} \langle 1 \end{cases} \quad k = 1, \ldots, K$$

II. Постановка на полубезкрайната оптимизационна задача

Избраният подход за решаване на задачата за едновременна апроксимация във времева и честотна област е полубезкрайната оптимизация. Характерна особеност на този метод е, че се извършва минимизация на един критерий, а останалите целеви функции играят ролята на функционални ограничения [2, 5].

В конкретния случай на проектиране на РЦФ задачата за полубезкрайна оптимизация се поставя във вида:

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} f(\mathbf{x}) \tag{7}$$

$\Phi_1 = \tau(\mathbf{x}, \phi) - \tau_u \leq 0$ за всяко $\phi \in [0, \Phi_p]$

$\Phi_2 = \tau_l - \tau(\mathbf{x}, \phi) \leq 0$ за всяко $\phi \in [0, \Phi_p]$

$\Phi_3 = h_l(n) - h(\mathbf{x}, n) \leq 0$ за всяко $n = 1, 2, \ldots, N$

$\Phi_4 = h(\mathbf{x}, n) - h_u(n) \leq 0$ за всяко $n = n_0, n_0 + 1, \ldots, N$

където Φ_p - множество от честоти в лентата на пропускане

τ_u, τ_l - ограничения за груповото време на закъснение

$h_u(n), h_l(n)$ - горна и долна желани функции за преходната характеристика

Целевата функция (7) може да бъде дефинирана по два различни начина:

$$f(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{x} \in X} \max_{\phi \in \Phi_p \cup \Phi_s} \left| M(\mathbf{x}, \phi) - M_0(\phi) \right|$$

където Φ_a - множество от честоти в лентата на непропускане

$M_0(\phi)$ - желана функция-еталон за АЧХ

или

$$f_1 = \left[\sum_{i=1}^{n} \left[M(\mathbf{x},\phi_i) - M_0(\phi_i) \right]^2 \right]^{1/2} \qquad \phi_i \in \Phi_p \cup \Phi_t \cup \Phi_a$$

III. Числени примери

Проектиране на нискочестотен РЦФ от втори ред

Числените експерименти са направени за нискочестотен РЦФ със следните изисквания: лента на пропускане $\Phi_p = \{0, 0.18\}$, преходна област $\Phi_t = \{0.18, 0.3\}$ и лента на непропускане $\Phi_a = \{0.3, 1\}$.

Изискванията към апроксимираната АЧХ са описани като желана функция-еталон както следва:

$$M_0(\mathbf{x},\phi) = \begin{cases} 1 \quad , for\ \phi \in \Phi_p \\ 0.1, for\ \phi \in \Phi_a \end{cases}$$

$\tau_l = 1.75$, $\tau_u = 2$, $h_u = 1.3$, $h_l = 0.8$

Задачата за полубезкрайна оптимизация е поставена във вида:

$$\min_{\delta, \mathbf{x} \in X} \delta$$

$-\delta \le M(\mathbf{x},\phi) - M_0(\mathbf{x},\phi) \le \delta$, за всяко $\phi \in \Phi_p \cup \Phi_a$

$1.75 \le \tau(\mathbf{x},\phi) \le 2$, за всяко $\phi \in \Phi_p$

$h(\mathbf{x},n) \le 1.3$, за всяко $n \ge 1$

$h(\mathbf{x},n) \ge 0.8$, за всяко $n \ge 4$

Векторът от оптимизируеми параметри се записва като:

$$\mathbf{x} = (r_o, \phi_o, r_p, \phi_p, h_o, \delta) \quad \delta > 0$$

Оптимизационната задача е решена с помощта на Optimization toolbox на пакета PC MATLAB [4].

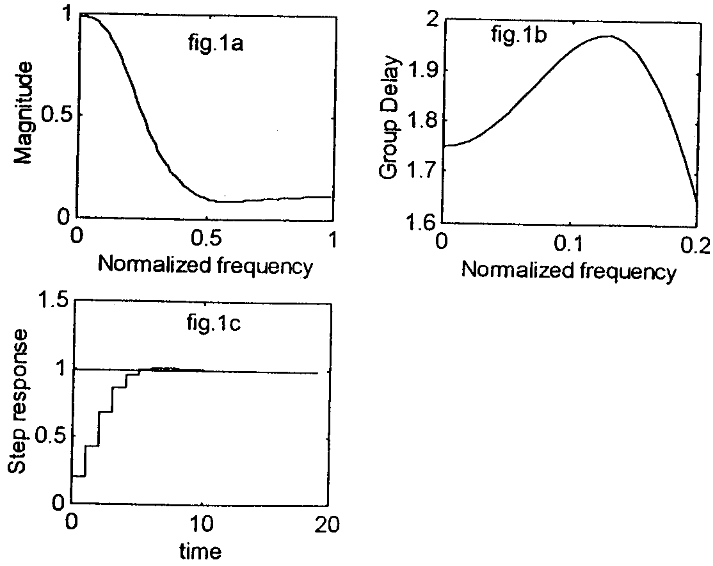
Получено е следното оптимално решение:

$$x^{opt} = (\, 0.6389,\ 1.6389,\ 0.5864,\ 0.4840,\ 0.2023,\ 0.0156 \,)\ ,\ \phi \in \Phi_p \cup \Phi_a$$

при грешка на равномерната апроксимация на АЧХ

$$\max_{\phi \in \Phi_p \cup \Phi_a} \left| M(x,\phi) - M_0(\phi) \right| \leq 0.0156.$$

Характеристиките на проектирания НЧ РЦФ са показани в графичен вид на Фигура 1. Анализът показва, че е постигната добра селективност на РЦФ, т.е. приемлива стръмност на АЧХ в преходната област и удовлетворяване на ограничението за АЧХ в лентата на непропускане (Фиг. 1а). Характеристиката на груповото време на закъснение удовлетворява зададените изисквания, но има нелинеен характер на изменение с малка неравномерност (Фиг. 1в). Преходната характеристика (Фиг. 1с) също удовлетворява поставените изисквания като продължителността на преходния процес е по-малка в сравнение с филтър, оптимален само по отношение на АЧХ.



IV. Използвана литература

1. Cortelazzo G., M.R.Lightner, Simultaneous Design in Both Magnitude and Group Delay of IIR and FIR Filters Based on Multiple Criterion Optimization, IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing, Vol. ASSP-32, No 5, Oct. 1984.

2. Jannings L.S., K. L. Teo, A computational algorithm for functional inequality constrained optimization problem, Automatika, Vol 26, No 2, 1990.

3. Radecki J., J. Konrad, E. Dubois, Design of Multidimensional Finite-Wordlength FIR and IIR Filters by Simulated Annealing, IEEE Trisections on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing, Vol. 42, No 6, June 1995, pp. 424-431.

4. PC MATLAB for MS DOS Personal Computers, User's Guide, 1992.

5. Polak E., D.Q. Mayne, D. H. Stimler, Control System Design Via Semi-Infinite Optimization: A Review, Proceedings of the IEEE, Vol. 72, No 12, December 1984.