Относно математичните модели за анализ на двумерни магнитни полета в изотропни и анизотропни среди

Савов. В. Н.[*], Т. Г. Тодоров[**], Ж. Д. Георгиев[*]
[*] ТУ- София, катедра ТЕ, [**] ТУ-София, катедра ЕТ

Abstract - Three mathematical models M_0, M_1, M_2 for analysis of two-dimensional magnetic fieds in nonlinear media have been discussed by means of the finite element method.

It has been assumed that by model M_0 the medium where the field is localized is isotropic, while by models M_1 and M_2 the medium is anisotropic whith two mutually perpendicular directions of anisotropy p and q.

The difference between models M_1 and M_2 is difined by the way the tensor $\bar{\bar{\nu}}^*$ of mediums magnetic reluctivity in the local coordinate system has been formed. By mathematical models M_1, each one of the diagonal (nonzero) components ν_p and ν_q of the tensor $\bar{\bar{\nu}}^*$ depends upon the components B_p and B_q of the magnetic induction in both directions of anisotropiy; by mathematical models M_2 component ν_p depend only upon B_p, while component ν_q - only upon B_q.

It has been pointed out that mathematical model M_0 can be considered as a special case of model M_1, when $\nu_p = \nu_q = \nu$. Sush correspondence between models M_0 and M_2 does not exist.

I. Описание на математичните модели.

Навсякъде по-нататък се приема, че магнитното поле е двумерно и се характеризира с интензитет $\bar{\mathbf{H}}$, индукция $\bar{\mathbf{B}}$ и векторен потенциал $\bar{\mathbf{A}}$. Електричният ток, който обуславя полето има векторна плътност $\bar{\mathbf{J}}$.

1. Математичен модел M_0 за анализ на магнитното поле в нелинейна изотропна среда.

Приема се, че средата в която е локализирано магнитното поле е нелинейна, изотропна и се характеризира с магнитен релуктивитет ν. Въвежда се координатна система $(Oxyz, \bar{\mathbf{i}}, \bar{\mathbf{j}}, \bar{\mathbf{k}}.)$.

При тази постановка са валидни зависимостите

$$\vec{\mathbf{H}} = H_x \vec{\mathbf{i}} + H_y \vec{\mathbf{j}}, \quad \vec{\mathbf{B}} = B_x \vec{\mathbf{i}} + B_y \vec{\mathbf{j}}, \quad \vec{\mathbf{H}} = \nu \vec{\mathbf{B}},$$

(1.1)

$$\vec{\mathbf{B}} = rot\, \vec{\mathbf{A}} = \frac{\partial A}{\partial y} \vec{\mathbf{i}} - \frac{\partial A}{\partial x} \vec{\mathbf{j}}, \quad \vec{\mathbf{A}} = A\, \vec{\mathbf{k}}, \quad \vec{\mathbf{J}} = J\, \vec{\mathbf{k}}.$$

Приема се, че

(1.2) $\nu = \nu\left(B^2\right)$, $B = \left|\vec{B}\right|$.

Величинината A се определя от решаването на диференциалното уравнение

(1.3) $$\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu \frac{\partial A}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\nu \frac{\partial A}{\partial y}\right) = -J.$$

Решаването се извършва в двумерната равнинна област (S), ограничена от контура (Γ), върху който са зададени определени гранични условия. Единичната нормала на контура (Γ) е $\vec{\mathbf{n}}$, а единичната му тангента - $\vec{\mathbf{t}}$.

Решението A на диференциалното уравнение (1.3) минимизира функцианала

(1.4) $$\Im = \iint\limits_{(S)} [\int\limits_{0}^{\vec{\mathbf{B}}} \vec{\mathbf{H}} d\vec{\mathbf{B}} - JA] ds + \int\limits_{(\Gamma_3)} H_t A dl,$$

където H_t е тангенциалната компонента на магнитния интензитет $\vec{\mathbf{H}}$, а (Γ_3) онази част от контура (Γ)(ако съществува такава), върху която са зададени нехомогенни гранични условия на Нейман.

При използване метода на крайните елементи областта (S) се дискретизира на m елемента (S_e), като се използва мрежа с n възела.

Решението A се апроксимира върху всеки един от елементите (S_e) по следния най-общ начин

(1.5) $$A^e = \sum_p \alpha_p^e(x,y) A_p = \left\{\overline{\alpha}^{\,e}\right\}^T \left\{\overline{\mathbf{A}}^{\,e}\right\},$$

където $\left\{\overline{\alpha}^{\,e}\right\} = \left[\alpha_i^e \ \alpha_j^e \ \ldots\right]^T$ е матрица стълб от функциите на формата за елемента (S_e), а $\left\{\overline{\mathbf{A}}^{\,e}\right\} = \left[A_i^e \ A_j^e \ \ldots\right]^T$ - матрица стълб от стойностите на A във възловите точки на елемента (S_e).

От равенства (1.1) и (1.5) се вижда, че

$$(1.6)\quad B_x = \frac{\partial A}{\partial y} = \sum_p \frac{\partial \alpha_p^e}{\partial y} A_p,\quad B_y = -\frac{\partial A}{\partial x} = -\sum_p \frac{\partial \alpha_p^e}{\partial x} A_p.$$

При тази постановка от равенство (1.3) се получава нелинейното матрично уравнение

$$(1.7)\quad [\overline{\mathbf{S}}]\{\overline{\mathbf{A}}\} = \{\overline{\mathbf{g}}\} - \{\overline{\mathbf{H}}\},$$

където $\{\overline{\mathbf{A}}\} = [A_1\ A_2 \ldots A_n]^T$, а $\underset{\mathbf{n}\times\mathbf{n}}{[\overline{\mathbf{S}}]}$, $\underset{\mathbf{n}\times 1}{\{\overline{\mathbf{g}}\}}$ и $\underset{\mathbf{n}\times 1}{\{\overline{\mathbf{H}}\}}$ са матрици с елементни коефициенти

$$(1.8)\quad S_{ij}^e = \iint\limits_{(S_e)} \nu\left(\nabla\alpha_i^e . \nabla\alpha_j^e\right) ds,\quad g_i^e = \iint\limits_{(S_e)} \alpha_i^e J^e ds,\quad H_i^e = \int\limits_{(\Gamma_{3e})} \alpha_i^e H_t^e dl.$$

Съгласно метода на Нютон - Рафсън, решаването на уравнение (1.7) се свежда до организирането на итерационната процедура

$$(1.9)\quad \left|\begin{array}{l} [\mathbf{P}]^{N+1}\{\Delta\overline{\mathbf{A}}\}^{N+1} = -\{\overline{\mathbf{V}}\}^{N+1} \\ \{\overline{\mathbf{A}}\}^{N+1} = \{\overline{\mathbf{A}}\}^{N} + \{\Delta\overline{\mathbf{A}}\}^{N+1} \end{array}\right.,$$

където N и $N+1$ са номерата на две последователни итерации, $\{\Delta\overline{\mathbf{A}}\} = [\Delta A_1\ \Delta A_2 \ldots \Delta A_n]^T$ е матрица стълб от нарастващите на неизвестната $\{\overline{\mathbf{A}}\}$, а $\{\overline{\mathbf{V}}\}^{N+1} = [\overline{\mathbf{S}}]^N\{\overline{\mathbf{A}}\}^N - \{\overline{\mathbf{g}}\} + \{\overline{\mathbf{H}}\}$.

Матрицата $[\mathbf{P}]^{N+1}$ има следните елементни коефициенти

$$(1.10)\quad P_{ij}^{e,N+1} = S_{ij}^{e,N} + Q_{ij}^{e,N},$$

където

$$(1.11)\quad Q_{ij}^e = 2\sum_p\sum_q\left[\iint\limits_{(S_e)} \frac{\partial\nu^e}{\partial\left(B^e\right)^2}\left(\nabla\alpha_i^e . \nabla\alpha_p^e\right)\left(\nabla\alpha_j^e . \nabla\alpha_q^e\right)ds\right] A_p A_q,$$

Символите $\sum\limits_p$ и $\sum\limits_q$ означават сумиране по номерата на възлите от елемента (S_e).

2. Математични модели M_1 и M_2 за анализ на магнитни полета в нелинейни анизотропни среди.

Приема се, че в пространствената област, в която е локализирано магнитното поле са разположени определен брой нелинейни анизотропни среди.

За всяка анизотропна среда се въвежда по една локална координатна система$(0pqz, \vec{\mathbf{p}}_0, \vec{\mathbf{q}}_0, \vec{\mathbf{k}})$, чиито оси p и q съвпадат с посоките на нейната анизотропия. Всички данни които характеризират свойствата на анизотропната среда се задават в нейната локална координатна система (за удобство векторите и тензорите в локалната координатна система се означават с *).

Въвежда се и глобалната координатна система $(0xyz, \vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{k})$, която е завъртяна спрямо локалната на ъгъл θ. В тензорните равенства това обстоятелство се изразява посредством тензора на завъртането

$$(2.1)\quad \bar{\bar{\mathbf{T}}} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

При тази постановка в локалната координатна система са валидни зависимостите

$$(2.2)\quad \begin{aligned} &\vec{\mathbf{B}}^* = B_p\,\vec{\mathbf{p}}_0 + B_p\,\vec{\mathbf{q}}_0,\ \vec{\mathbf{H}}^* = H_p\,\vec{\mathbf{p}}_0 + H_q\,\vec{\mathbf{q}}_0, \\ &H_p = \nu_p B_p,\ H_q = \nu_q B_q,\ \vec{\mathbf{H}}^* = \bar{\bar{\nu}}^*\,\vec{\mathbf{B}}^*, \end{aligned}$$

където

$$(2.3)\quad \bar{\bar{\nu}}^* = \begin{bmatrix} \nu_p & 0 \\ 0 & \nu_q \end{bmatrix}$$

е тензорът на магнитния релуктивитет на средата (в локалната координатна система).

Различието между математичните модели M_1 и M_2 се определя от начина по който се формира тензорът $\bar{\bar{\nu}}^*$ при всеки един от тях.

При математичния модел M_1 се приема,че

$$(2.4)\quad \nu_p = \nu_p(B_p^2, B_q^2) \text{ и } \nu_q = \nu_q(B_p^2, B_q^2).$$

При математичния модел M_2 се приема,че

$$(2.5)\quad \nu_p = \nu_p(B_p^2) \text{ и } \nu_q = \nu_q(B_q^2).$$

В глобалната координатна система са валидни зависимостите

$$(2.6)\quad H_x = \nu_{xx}B_x + \nu_{xy}B_y,\ H_y = \nu_{yx}B_x + \nu_{yy}B_y,\ \vec{\mathbf{H}} = \bar{\bar{\nu}}\,\vec{\mathbf{B}},$$

където

$$(2.7)\quad \bar{\bar{\nu}} = \begin{bmatrix} \nu_{xx} & \nu_{xy} \\ \nu_{yx} & \nu_{yy} \end{bmatrix}$$

е тензорът на магнитния релуктивитет на средата (в глобалната координатна система).

Лесно може да се докаже, че при анизотропна среда величината A удовлетворява диференциалното уравнение

$$(2.8)\quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\nu_{yy}\frac{\partial A}{\partial x}-\nu_{yx}\frac{\partial A}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu_{xx}\frac{\partial A}{\partial y}-\nu_{xy}\frac{\partial A}{\partial x}\right)=-J,$$

а решението A минимизира отново функцианала (1.4).

Като се приложи методът на крайните елементи от равенство (2.8) се получава нелинейното матрично уравнение

$$(2.9)\quad [\overline{\mathbf{S}}]\{\overline{\mathbf{A}}\}=\{\overline{\mathbf{g}}\}-\{\overline{\mathbf{H}}\}.$$

Елементните коефициенти на матрицата $[\overline{\mathbf{S}}]$ в това уравнение са

$$(2.10)\qquad S_{ij}^{e}=\iint\limits_{(S_e)}\{\overline{\mathbf{B}}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{e}}\}^{\mathrm{T}}[\mathbf{T}]^{-1}[\nu^{*}][\mathbf{T}]\{\overline{\mathbf{B}}_{\mathrm{j}}^{\mathrm{e}}\}\,ds,$$

където $[\nu^*]$ е матрицата на тензора $\overline{\overline{\nu}}^{\,*}$, $[\mathbf{T}]$ - матрицата на тензора $\overline{\overline{\mathbf{T}}}$, а

$$(2.11)\quad \begin{aligned}\{\overline{\mathbf{B}}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{e}}\}&=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial B_x}{\partial A_i} & \dfrac{\partial B_y}{\partial A_i}\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial\alpha_i^e}{\partial y} & -\dfrac{\partial\alpha_i^e}{\partial x}\end{bmatrix}^T\\ \{\overline{\mathbf{B}}_{\mathrm{j}}^{\mathrm{e}}\}&=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial B_x}{\partial A_j} & \dfrac{\partial B_y}{\partial A_j}\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial\alpha_j^e}{\partial y} & -\dfrac{\partial\alpha_j^e}{\partial x}\end{bmatrix}^T.\end{aligned}$$

Решаването на уравнение (2.9) се свежда отново до организирането на итерационна процедура от вида (1.9). В случая елементните коефициенти на матрицата $[\mathbf{P}]^{N+1}$ са

$$(2.12)\quad P_{ij}^{e,N+1}=S_{ij}^{e,N}+Q_{ij}^{e,N},$$

където

$$(2.13)\quad Q_{ij}^{e}=\iint\limits_{(S_e)}\{\overline{\mathbf{B}}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{e}}\}^{\mathrm{T}}[\mathbf{T}]^{-1}[\mathbf{F}^{*}][\mathbf{T}]\{\overline{\mathbf{B}}_{\mathrm{j}}^{\mathrm{e}}\}\,ds,$$

а

$$(2.14)\quad [\mathbf{F}^*]=\underbrace{\begin{bmatrix}2B_p^2\dfrac{\partial\nu_p}{\partial B_p^2} & 2B_pB_q\dfrac{\partial\nu_p}{\partial B_q^2}\\ 2B_pB_q\dfrac{\partial\nu_q}{\partial B_p^2} & 2B_q^2\dfrac{\partial\nu_q}{\partial B_q^2}\end{bmatrix}}_{\text{за модел } M_1};[\mathbf{F}^*]=\underbrace{\begin{bmatrix}2B_p^2\dfrac{\partial\nu_p}{\partial B_p^2} & 0\\ 0 & 2B_q^2\dfrac{\partial\nu_q}{\partial B_q^2}\end{bmatrix}}_{\text{за модел } M_2}.$$

II. Връзка между математичните моделите $M_1 \to M_0$ и $M_2 \to M_0$.

В частния случай, когато средата е изотропна във всеки един от математичните модели M_1 и M_2 следва да се положи

(3.1)
$$x \equiv p,\ y \equiv q,\ z \equiv z',\ B_x = B_p,\ B_y = B_q,\ \nu_x = \nu_p = \nu$$
$$[\mathbf{T}] = [\mathbf{T}]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

В този случай може да се покаже, че :

а) при моделите M_1 и M_2 равенство (2.10) приема вида

(3.2) $$S_{ij}^e = \int_{(S_e)} \nu\left(\nabla\alpha_i^e . \nabla\alpha_j^e\right) ds$$

и се отъждесвява с първото от равенства (1.8);

б) при моделите M_1 и M_2 матрицата $\left[\mathbf{F}^*\right]$ приема вида

(3.3) $$\left[\mathbf{F}^*\right] = \underbrace{2\frac{\partial \nu}{\partial \mathrm{B}^2}\begin{bmatrix} B_x^2 & B_x B_y \\ B_x B_y & B_y^2 \end{bmatrix}}_{\text{за модел } M_1};\left[\mathbf{F}^*\right] = \underbrace{2\frac{\partial \nu}{\partial \mathrm{B}^2}\begin{bmatrix} B_x^2 & 0 \\ 0 & B_y^2 \end{bmatrix}}_{\text{за модел } M_2};$$

в) при модела M_1 равенство(2.13) приема вида

(3.4) $$Q_{ij}^e = 2\sum_p \sum_q \left[\iint_{(S_e)} \frac{\partial \nu^e}{\partial \left(B^e\right)^2} \left(\nabla\alpha_i^e . \nabla\alpha_p^e\right)\left(\nabla\alpha_j^e . \nabla\alpha_q^e\right) ds \right] A_p A_q$$

и се отъждествява с равенство (1.11).

Направените изводи показват, че математичният модел M_0 може да се разглежда като частен случай на математичния модел M_1 при $\nu_x = \nu_p = \nu$.

Подобно съответствие между математичните модели M_0 и M_2 не съществува.

Литература:

1. Норри Д., Ж. де Фриз, " Введение в метод конечных элементов ", " Мир ", Москва, 1981 г.