МАТЕМАТИЧЕСКО МОДЕЛИРАНЕ НА ЕЛЕКТРОТОПЛИННИТЕ ПРОЦЕСИ ПРИ ОБЕМНО ИНДУКЦИОННО НАГРЯВАНЕ

инж. Николай Христов Ненов
проф. дтн. Тодор Стойков Тодоров
ВМЕИ - Габрово

Както е известно, в устройствата за индукционно нагряване определяща роля имат електромагнитните и топлинни явления. Досегашното развитие на теорията е довело до създаването на електротоплинни модели, основаващи се на съвместното решаване на уравненията на електромагнетизма и температуропроводността при използуване на подходящи числени методи [1] . Един от тези методи, характеризиращ се с добри резултати при моделирането на електротоплинните процеси, е методът на крайните разлики.

Процесът на индукционно нагряване на цилиндрично тяло в надлъжно магнитно поле /фиг. 1/ може да се опише със система едномерни нелинейни диференциални уравнения на електромагнетизма и топлопроводността [2] .

$$\left|\begin{aligned} &\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(\rho R\frac{\partial \dot{H}}{\partial R}\right)=j\omega\mu\mu_0\dot{H} \\ &C_v\frac{\partial T}{\partial t}-\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(\lambda R\frac{\partial T}{\partial R}\right)=q \end{aligned}\right. \qquad /1/$$

където: $\dot{H}$ - комплексната напрегнатост на магнитното поле;
R - ефективен радиус на цилиндричното тяло;
ρ - специфично съпротивление;
μ - относителна магнитна проницаемост;
$\mu_0 = 4\pi.10^{-9}$ H/cm
$\omega = 2\pi \cdot f$
C_v - обемен топлинен капацитет;
λ - топлопроводност;
T - температура;
q - специфична обемна мощност на вътрешните източници на топлина

$$q=\rho\left|\frac{\partial \dot{H}}{\partial R}\right|^2$$

Граничните стойности се определят от режима на нагряване и условията на топлообмен. Граничните условия за система /1/ имат вида:

- на вътрешната повърхност на цилиндър с радиус R_B

$$R = R_B \rightarrow \rho \frac{\partial \dot{H}}{\partial R} = j\omega\mu_0 R_B \dot{H}/2$$

и
$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial R} = \Delta p_1$$

където: $\Delta P1$ - специфичната мощност на топлинните загуби от вътрешната повърхност на цилиндъра.

При плътен цилиндър $R_B = 0$ и $\frac{\partial}{\partial R} \dot{H}(R_B) = 0$

- на външната повърхност на цилиндър с радиус R_2

$$R = R_2 \longrightarrow \dot{H} = \dot{H}_e$$

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial R} = \varepsilon\sigma\left(T^4 - T_c^4\right) - \alpha\left(T - T_c\right) = \Delta p_0$$

където : ΔP_o - специфична мощност на топлинните загуби;

ε - коефициент на чернота;

α - коефициент на топлообмен;

σ - const на Стефан - Болцман:

Tc - температура на околната среда, K^o.

Решението на система /1/ е целесъобразно да се осъществи без комплексни величини. За целта комплексната величина H се представя във вида $\dot{H} = u + j\vartheta$, където u и ϑ са съответно реалната и имагинерната съставящи на напрегнатостта на магнитното поле. По такъв начин се получава система от три уравнения относно u, ϑ и T.

$$\left|\begin{array}{l} \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(\rho R \frac{\partial u}{\partial R}\right) = -\omega\mu\mu_0\vartheta \\ \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(\rho R \frac{\partial \vartheta}{\partial R}\right) = \omega\mu\mu_0 u \\ C_v \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(\lambda R \frac{\partial T}{\partial R}\right) + \rho\left[\left(\frac{\partial u}{\partial R}\right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial R}\right)^2\right] \end{array}\right. \qquad /2/$$

Съответно се преобразуват и граничните условия, като при

$$R = R_B \Longrightarrow \quad \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial R} = -\omega\mu_0 R_B \dfrac{v}{2\rho} \\ \dfrac{\partial v}{\partial R} = \omega\mu_0 R_B \dfrac{u}{2\rho} \\ -\lambda \dfrac{\partial T}{\partial R} = \Delta p_1 \end{array} \right.$$

а при $R = R_2 \Longrightarrow \quad \left| \begin{array}{l} u = u_e \quad , v = v_e \\ -\lambda \dfrac{\partial T}{\partial R} = \Delta p_0 \end{array} \right.$

С въвеждането на пространствено-временна мрежа $\Omega_{h\tau} = \hat{\omega}_h \times \hat{\omega}_\tau$, където $\hat{\omega}_h = \{ R_i = R_{i-1} + h_i \, ; \, i = 1, 2, \ldots, N; \; R_0 = R_B \}$ - пространствено неравномерна мрежа, а $\hat{\omega}_\tau = \{ t_j = t_{j-1} + \tau_j ; j = 1, 2, \ldots, M; t_0 = 0 \}$ - временно неравномерна мрежа, неявната итерационно-разностна схема, построена на принципа на консервативността, добива следния матричен вид:

$$A_i W_{i-1}^{j+1} - C_i W_i^{j+1} + B_i W_{i+1}^{j+1} = -F_i^j \qquad /3/$$

Където

$$W_i = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ T_i \end{bmatrix} ; \quad A_i = \begin{bmatrix} a_{Hi} & 0 & 0 \\ 0 & a_{Hi} & 0 \\ 0 & 0 & a_{Hi} \end{bmatrix} ; \quad C_i = \begin{bmatrix} c_{Hi} & -k_i & 0 \\ k_i & c_{Hi} & 0 \\ 0 & 0 & c_{Ti} \end{bmatrix}$$

$$B_i = \begin{bmatrix} b_{Hi} & 0 & 0 \\ 0 & b_{Hi} & 0 \\ 0 & 0 & b_{Ti} \end{bmatrix} ; \quad F_i^j = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g_i \end{bmatrix} ;$$

$$a_{Hi} = \frac{\rho_i + \rho_{i-1}}{h_i + h_{i+1}} \left(\frac{1}{h_i} - \frac{0,5}{R_i} \right) ;$$

$$b_{Hi} = \frac{\rho_i + \rho_{i-1}}{h_i + h_{i+1}} \left(\frac{1}{h_{i+1}} + \frac{0,5}{R_i} \right) ;$$

$$C_{Hi} = a_{Hi} + b_{Hi}\ ; \quad k_i = \omega \mu_o \mu_i\ ; \quad c_{Ti} = a_{Ti} + b_{Ti} + \frac{c_{vi}}{\tau_j}$$

$$g_i = \rho_i (u_i'^2 + v_i'^2) + (c_{vi} / \tau_j) T_i^j$$

Стойностите на a_{Ti} и b_{Ti} се изчисляват така както и a_{Hi} и b_{Hi}, но се замества ρ с λ.

Производните u_i' и v_i' се намират по формулите за крайните разлики или, за по-голяма точност, след интерполация на функциите u и v със сплайнове от трети ред. Коефициентите се определят като се изхожда от стойностите на W на предишната итерация, т.е. използува се методът на простите итерации. Решението на система /3/ се осъществява по метода на Гаус.

В съответствие с този метод пресмятането става на два етапа. Първо се пресмятат матриците

$$C_{i+1} = [C_i - A_i G_i]^{-1} B_i\ , \quad i = 1, 2, \ldots, N-1 \qquad /4/$$
$$Q_{i+1} = [C_i - A_i G_i]^{-1} [A_i Q_i + F_i], \quad i = 1, 2, \ldots, N-1$$

на втория етап търсените компоненти на матрицата W_i се определят по израза:

$$W_i = G_{i+1} W_{i+1} + Q_{i+1}\ , \quad i = N-1, N-2, \ldots, 2, 1.0 \qquad /5/$$

Основният недостатък на матричния метод е свързан с необходимостта на всяка стъпка на пресмятане на /4/ да се обръща матрицата $[C_i - A_i G_i]$, което в общия случай води до голям обем изчисления. В дадената задача, отчитайки спецификата на матрицата $[C_i - A_i G_i]$ - матрица от трети ред /девет коефициента, четири от които са равни на нула/, този недостатък се преодолява като се записват коефициентите на обратните матрици в явен вид. В началото на изчисленията по формулите /4/ е необходимо да се знаят коефициентите на матриците G_1 и Q_1, които се определят от граничните условия при $R = R_B$. За да се изчислява по формула /5/ трябва да се знае W_N. Коефициентите на W_N се определят от граничните условия при $R = R_2$, които в общия случай могат да се запишат като

$$A_N W_{N-1} - C_N W_N = - F_N \qquad /6/$$

Замествайки в /6/ израза /5/, изчислен за $i = N-1$, се получава

$$W_N = (C_N - A_N G_N)^{-1} (F_N + A_N Q_N) \qquad /7/$$

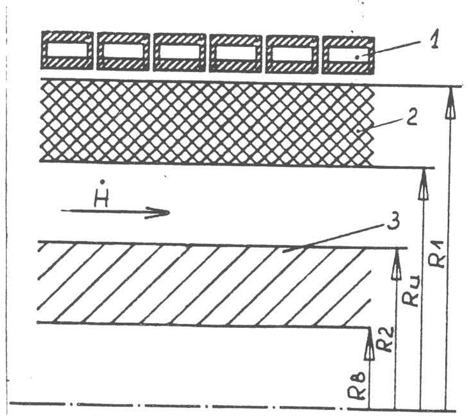
В зависимост от начина на нагряване граничните условия на повърхността на тялото са различни, затова структурата и стойностите на коефициентите на матриците A_N , C_N , F_N също са различни.

С помощта на този модел беше създаден програмен продукт, даващ възможност за моделиране на електротоплинните процеси в индуктори за отделно индукционно нагряване. Заложени бяха действителни параметри на УОИН в ковашко-пресов цех на ДЗ "Подем" - Габрово. Резултатите от моделирането са показани посредством графиките на фиг. 2. Измерването на температурата беше извършено с оптически пирометър HPH - 1400. При направеното сравнение беше констатирана разлика в достигане на крайната температура /1250°C/ от порядъка на $4 \div 5 s$, при най-малко технологически допустимо време 1,52 min.

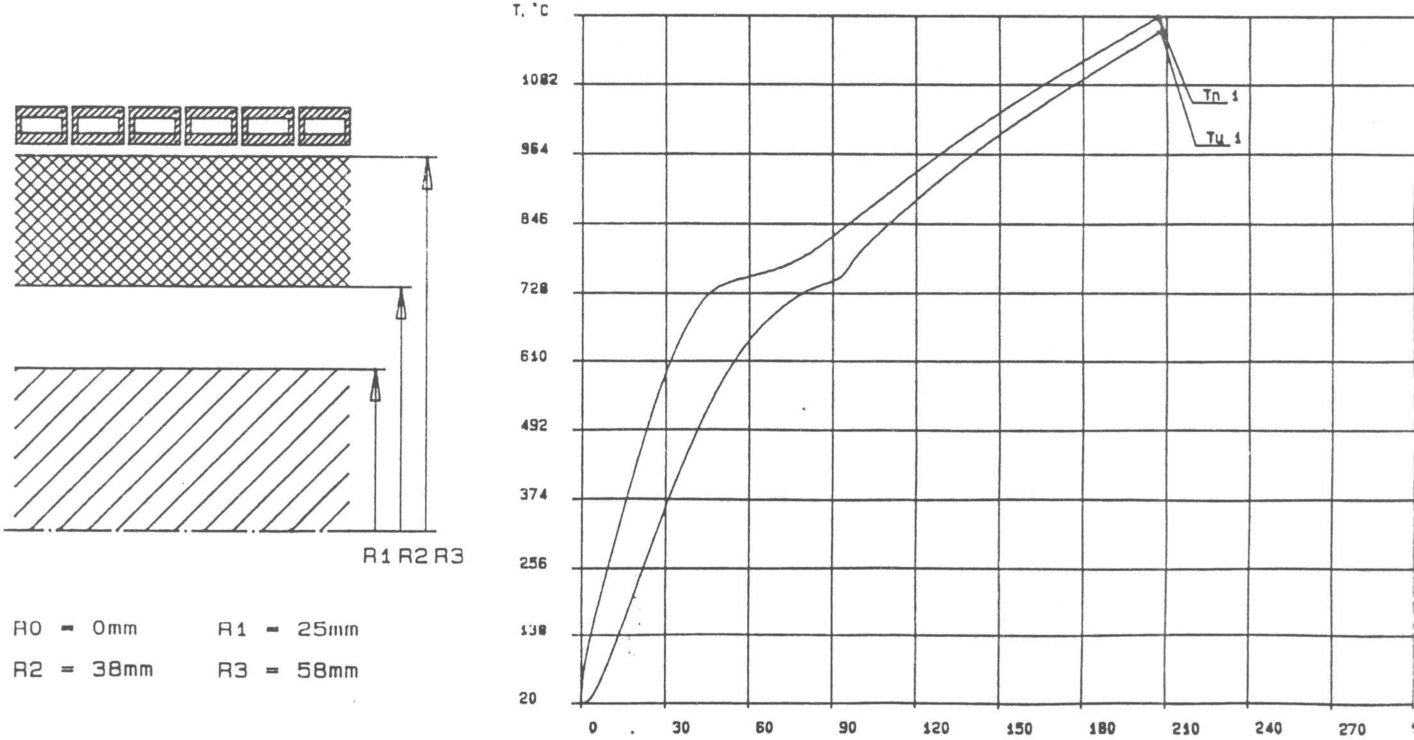
ЛИТЕРАТУРА

[1] Немков, В.С., Демидович, В.Б., Теория и расчет устройств индукционного нагрева, Энергоатомиздат. Л., 1988.

[2] Слухоцкий, А.Е., Установки индукционного нагрева, Энергоиздат. Л., 1981.



Фиг. 1 Индуктор за обемно индукционно нагряване на цилиндрични тела
1-индуктор; 2-топлинна изолация; 3-нагреваемо тяло



Фиг.2 Графика на функцията T=f(t) при f=2500.Hz и Uинд.=750.v
Tп1-температура на повърхността; Tц1-температура в центъра